Martin Hriňák, Katarína Hriňáková

Zbierka úloh z matematiky 3

Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika

Trojuholník

Deliteľnosť

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje.

Milí žiaci.

Dostávate do rúk tretiu zo zbierok úloh pre základné a stredné školy, ktoré sme vydali v rámci projektu Zlepšime výsledky žiakov v matematike a fyzike. Veríme, že vám tieto zbierky pomôžu precvičiť si novozískané poznatky, aby ste si vybudovali dobré základy, na ktorých budete môcť v nasledujúcich rokoch stavať. V rámci nášho projektu sme pre vás vytvorili aj videá, v ktorých nájdete riešenia vybraných úloh. Tieto videá nájdete na našej webovej stránke

https://www.jsmf.eu/projekt-zlepsime/.

Pri riešení úloh v tejto zbierke sa snažte nájsť presné riešenie. V prípade, že výsledok neviete zapísať v tvare zlomku alebo desatinného čísla s konečným počtom desatinných miest, uveďte výsledok s presnosťou na dve desatinné miesta, ak nie je povedané inak.

Prajeme vám veľa správne vyriešených úloh.

Autori

Autori: © Ing. Mgr. Martin Hriňák

© Mgr. Katarína Hriňáková, PhD.

Lektorovali: doc. RNDr. Andrea Feňovčíková, PhD.

prof. RNDr. Martin Kalina, CSc.

PaedDr. Ľubomír Konrád, PhD.

Mgr. Miroslava Konrádová

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov, FMFI UK, Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava-Karlova Ves, v Bratislave v roku 2023. Vydanie prvé.

ISBN 978-80-89829-12-5

EAN 9788089829125

Táto publikácia bola vydaná v rámci projektu Zlepšime výsledky žiakov v matematike a fyzike, kód projektu v ITMS2014+: 312011Z557, ktorý sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje.

8 Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika

8.1 Pravidlo súčtu a súčinu

1. Miroslav sa cez obedovú prestávku ide najesť do niektorej z troch blízkych reštaurácií. V reštaurácii vedľa školy majú v ponuke tri rôzne denné menu, v reštaurácii oproti škole až päť rôznych menu a v reštaurácii za rohom má na výber len z dvoch rôznych menu. Koľko rôznych obedových menu má na výber?

2. V školskej jedálni majú na výber dve polievky, tri hlavné jedlá a dva druhy šalátov. Koľko rôznych obedových menu si môžeme zostaviť, ak si vyberáme jednu polievku, jedno hlavné jedlo a jeden šalát?

3. V obchode majú päť druhov cukríkov, desať druhov čokolád a sedem druhov keksov.

   a) Koľkými spôsobmi si môže Leonard vybrať jednu sladkosť?

   b) Koľkými spôsobmi si môže Ivica vybrať jednu čokoládu a jednu inú sladkosť k tomu?

4. Na vrchol kopca sa dá dostať priamo z parkoviska pod kopcom lanovkou alebo peši po žltej značke. Okrem toho od parkoviska vedú cez les tri rôzne turistické trasy (zelená, modrá a červená) na chatu pod vrcholom a od nej sa dá na vrchol vystúpiť dvomi rôznymi cestami (červenou a modrou).

   a) Koľkými spôsobmi sa vieme dostať na vrchol kopca?

   b) Koľkými spôsobmi môžeme vystúpiť na vrchol kopca a následne zísť dolu, ak sa chceme cestou dole zastaviť v chate na obed?

5. Jana má v skrini 10 tričiek, 3 blúzky, dvojo nohavíc a 5 sukní. Z nich si vyberá jeden kus oblečenia na hornú časť tela a jeden na dolnú.

   a) Koľkými spôsobmi si môže vybrať oblečenie?

   b) Koľkými spôsobmi sa môže obliecť, ak tričká nosí len k nohaviciam a blúzky len k sukniam?

   c) Koľkými spôsobmi sa môže obliecť, ak blúzky nosí len k sukniam?

8.2 Poradia, permutácie a variácie

1. Pomocou číslic 1, 2 zapíšte všetky možné dvojciferné čísla, pričom každú číslicu použijete práve raz. Koľko je takých čísel?

2. Pomocou číslic 1, 2, 3 zapíšte všetky možné trojciferné čísla, pričom každú číslicu použijete práve raz. Koľko je takých čísel?

3. Pomocou číslic 5, 7, 9 zapíšte všetky možné trojciferné čísla, pričom každú číslicu použijete práve raz. Koľko je takých čísel?

4. Pomocou číslic 1, 2, 4 zapíšte všetky možné trojciferné čísla, pričom každú číslicu použijete práve raz. Koľko z nich je párnych?

5. Pomocou písmen A, B, C zapíšte všetky možné trojpísmenové slová (bez ohľadu na význam slova), pričom každé písmeno použijete práve raz.

6. Peter, Martin a Juraj skončili na prvých troch miestach v súťaži, pričom na každom mieste bol vždy len jeden chlapec. Ako mohli preteky dopadnúť z hľadiska umiestnenia týchto troch chlapcov?

7. Pomocou písmen A, B, D, O zapíšte všetky možné štvorpísmenové slová (bez ohľadu na význam slova), pričom každé písmeno použijete práve raz. Ktoré z týchto slov majú v slovenčine zmysel a poznáte ich?

8. Pomocou číslic 1, 3, 5, 6 zapíšte všetky možné štvorciferné čísla, pričom každú číslicu použijete práve raz. Koľko je takých čísel?

9. Koľko existuje štvorciferných čísel zapísaných pomocou číslic 2, 4, 5, 6, pričom každá číslica je použitá práve raz? Koľko čísel je medzi nimi párnych?

10. PIN kód na odomknutie autorádia je štvorciferný a je zapísaný pomocou číslic 1, 2, 3, 4. Vieme o ňom, že každá číslica je použitá práve raz a že je nepárny. Koľko kódov spĺňa uvedenú podmienku?

11. Štyria kamaráti sledovali svoje príchody do práce (počas pracovných dní) a zistili, že počas jedného mesiaca prišli do práce každý deň v inom poradí. V ktorom mesiaci sa to mohlo stať?

12. Zuzana sa rozhodla, že bude do školy nosiť rôznofarebné oblečenie. Každý deň chce mať tričko, blúzku, sukňu a ponožky v inej farbe, pričom bude striedať červenú, modrú, zelenú a čiernu. Koľko rôznych farebných kombinácií oblečenia si môže obliecť?

13. Ján si do školy tento mesiac oblieka štyri druhy oblečenia – ponožky, trenírky, nohavice a tričko. Môže sa každý deň obliecť v inom poradí, ak v danom mesiaci neboli žiadne prázdniny?

14. Pomocou číslic 1, 2, 3 zapíšte všetky možné dvojciferné čísla, pričom každú číslicu použijete maximálne raz. Koľko je takých čísel?

15. Pomocou písmen A, B, L, E zapíšte všetky možné trojpísmenové slová (bez ohľadu na význam slova), pričom každé písmeno použijete maximálne raz. Koľko je takýchto slov?

16. Pomocou číslic 4, 5, 6 zapíšte všetky možné trojciferné čísla, pričom číslice môžete použiť aj viackrát. Koľko je takých čísel?

17. V triede s 30 žiakmi je potrebné zvoliť jedného predsedu triedy, jedného podpredsedu triedy a jedného pokladníka. Koľko existuje možností ich zvolenia, ak to musia byť žiaci danej triedy a jedna osoba môže byť zvolená len do jednej funkcie?

18. V hokejovej lige súťaží 12 družstiev. Koľkými spôsobmi môžu byť obsadené prvé tri miesta v súťaži, ak na každom mieste je vždy práve jedno družstvo?

19. Školského turnaja sa zúčastnilo 6 družstiev, pričom hrali systémom každý s každým jeden zápas. Koľko zápasov sa na turnaji odohralo?

20. Na konci športového zápasu dvoch družstiev si podali hráči z rozdielnych družstiev ruky. Určte, koľko podaní rúk sa uskutočnilo, ak každé družstvo má nasledujúci počet hráčov:

a) 7, b) 10, c) 15, d) 20, e) 25, f) 30.

21. Na začiatku školského roka sa zvítali žiaci v triede podaním rúk. Určte, koľkokrát si žiaci podali ruky, ak si každá dvojica podala ruku práve raz a v triede bol nasledujúci počet žiakov:

a) 10, b) 14, c) 15, d) 20, e) 25, f) 30.

22. Určte, koľko existuje párnych štvorciferných čísel obsahujúcich len číslice 2, 5, 8, 0.

23. Určte, koľko existuje párnych štvorciferných čísel obsahujúcich len cifry 3, 5, 7, 8, 9 väčších ako 7 000, ak sa v nich číslice neopakujú. Ktoré z nich je najväčšie?

24. Určte, koľko existuje párnych päťciferných čísel obsahujúcich len cifry 3, 5, 7, 8, 9 väčších ako 70 000, ak sa v nich číslice neopakujú. Ktoré z nich je najväčšie?

25. Určte, koľko existuje šesťpísmenových slov zložených z písmen A, E, I, K, L, M, v ktorých sa striedajú samohlásky a spoluhlásky.

26. Určte, koľko existuje šesťpísmenových slov zložených z písmen A, E, I, K, L, M, v ktorých sa striedajú samohlásky a spoluhlásky, pričom písmená sa neopakujú.

27. Určte, koľko existuje sedempísmenových slov zložených z písmen A, E, I, K, L, M, P, v ktorých sa striedajú samohlásky a spoluhlásky, pričom písmená sa neopakujú.

28. V dvojkovej číselnej sústave sa používajú na označovanie číslic len cifry 0 a 1. Určte, koľko existuje päťciferných čísel v tejto sústave (tak, ako v desiatkovej sústave, aj v dvojkovej sústave si nevšímame nuly pred prvou nenulovou číslicou).

29. V trojkovej číselnej sústave sa používajú na označovanie číslic len cifry 0, 1 a 2. Určte, koľko existuje päťciferných čísel v tejto sústave (tak, ako v desiatkovej sústave, aj v trojkovej sústave si nevšímame nuly pred prvou nenulovou číslicou).

30. Náhodne hádžeme dvoma kockami. Určte, koľko existuje možností výsledku hodu a aké sú možné súčty, ktoré môžu padnúť. Ktorý z nich sa bude vyskytovať najčastejšie a prečo?

8.3 Kombinácie

1. V zmrzlinovom stánku majú dnes na výber malinovú, citrónovú, mangovú a čučoriedkovú zmrzlinu. Koľkými spôsobmi si môžeme vybrať dve príchute? Vypíšte všetky možnosti.

2. V škole prebieha každý deň poobede iný krúžok. Koľkými spôsobmi si Ferko môže vybrať tri dni, počas ktorých bude chodiť na krúžky? Vypíšte všetky možnosti.

3. V jedálni majú v jednej veľkej nádobe lyžice, vidličky aj nože. Koľkými spôsobmi si môžeme vybrať z nádoby tri kusy príboru? Vypíšte všetky možnosti.

4. V rovine je vyznačených 10 rôznych bodov. Koľko existuje rôznych úsečiek, ktorých krajné body sú niektoré z týchto 10 bodov?

5. V rovine je vyznačených 8 bodov, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. Koľko existuje rôznych trojuholníkov, ktorých všetky vrcholy sú niektorými z týchto ôsmich bodov?

6. V obchode majú sedem druhov krabicových džúsov.

   a) Koľkými spôsobmi si môžeme vybrať tri rôzne krabice džúsu?

   b) Koľkými spôsobmi si môžeme vybrať tri krabice džúsu, ktoré nemusia byť rôzne?

7. V prvý letný deň poslala mama Nikolaja do obchodu a povedala mu: „Kúp šesť ľubovoľných nanukov.“ Nikolaj stál bezradne pred mraziacim pultom v obchode a vôbec sa nevedel rozhodnúť. „Keby tu mali len o dva druhy nanukov menej, hneď by som mal o polovicu ľahšie rozhodovanie, mal by som totiž dvakrát menej možností výberu, ako mám teraz.“ Koľko druhov nanukov mali v obchode?

8. V druhý letný deň poslala mama do obchodu Jaroslavu a povedala jej: „Kúp šesť rôznych nanukov.“ Aj Jaroslava stála bezradne pred mraziacim pultom v obchode a vôbec sa nevedela rozhodnúť, pretože tiež zistila, že ak tam mali o dva druhy nanukov menej, hneď by mala dvakrát menej možností výberu, ako má teraz. Koľko druhov nanukov mali v obchode?

9. V stromoradí popri ceste rastie 12 topoľov. Rastú príliš husto, preto treba niektoré z nich vyrúbať.
   a) Koľkými spôsobmi môžeme vybrať štyri stromy na výrub?
   b) Koľkými spôsobmi môžeme vybrať štyri stromy na výrub, ak nechceme vyrúbať žiadne dva stromy rastúce hneď vedľa seba?

10. Koľko existuje 11-písmenových slov (bez ohľadu na ich význam), ktoré obsahujú práve 4 písmená A a práve 7 písmen B?

11. Koľko existuje 11-písmenových slov (bez ohľadu na ich význam), ktoré obsahujú práve 4 písmená A, práve 7 písmen B a nie sú v nich dve písmená A vedľa seba?

12. V triede je 28 žiakov, z toho je 11 dievčat. Treba vybrať šesťčlenné družstvo žiakov z tejto triedy, ktorí pôjdu reprezentovať školu na súťaž.
   a) Koľkými spôsobmi môžeme vybrať družstvo?
   b) Koľkými spôsobmi sa dá zostaviť družstvo, ak sa Berta so Svetlanou pohádali a odmietajú byť spolu v družstve?
   c) Koľkými spôsobmi môžeme vybrať družstvo, ak v ňom majú byť dve dievčatá a štyria chlapci?
   d) Koľkými spôsobmi môžeme zostaviť družstvo, ak v ňom má byť aspoň jedno dievča?

13. V štvorčekovej sieti sa môžeme v každom kroku pohnúť len o jedno políčko doprava alebo nahor. Na začiatku sme v bode (0,0) a potrebujeme sa dostať do bodu (10,8).
   a) Koľko takých ciest existuje?
   b) Koľko existuje takých ciest, ktoré prechádzajú bodom (4,3)?
   c) Koľko existuje takých ciest, ktoré neprechádzajú bodom (7,2) a ani bodom (4,6)?
   d) Koľko existuje takých ciest, ktoré neprechádzajú bodom (4,2) a ani bodom (7,6)?

8.4 Kombinačné čísla a binomická veta

1. Zapíšte pomocou kombinačného čísla, koľkými spôsobmi môžeme vybrať:
   a) spomedzi desiatich detí dvojicu, ktorá si ako prvá zahrá stolný tenis,
   b) päticu detí z 25-člennej triedy, ktoré pôjdu ako prvé pretekať v plávaní,
   c) polovicu z dvanástich detí, ktorá bude v prvom futbalovom družstve.

2. Vypočítajte:

   a) $\binom{7}{2}$, b) $\binom{6}{3}$, c) $\binom{10}{10}$, d) $\binom{9}{8}$, e) $\binom{4}{5}$, f) $\binom{9}{4}$,

   g) $\binom{13}{1}$, h) $\binom{10}{4}$, i) $\binom{10}{5}$, j) $\binom{8}{5}$, k) $\binom{12}{7}$, l) $\binom{13}{11}$.

3. Umocnite pomocou binomickej vety:

   a) $(a+b)^3$, b) $(2x+y)^4$, c) $\left(\frac{1}{3}+3a\right)^4$, d) $(\sqrt{x}-1)^5$,

   e) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$, f) $\left(\frac{1}{2}+n^2\right)^4$, g) $\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^3$, h) $\left(\frac{k}{2}+2l\right)^5$.

4. Určte, aký koeficient je pri člene

   a) x^4 vo výraze $(x+1)^7$,
   b) x^2y^3 vo výraze $(2x+y)^5$,
   c) x^4y^6 vo výraze $(x-5y)^{11}$,
   d) a^6b^3 vo výraze $\left(a+\frac{b}{4}\right)^9$,
   e) $\frac{m^7}{n^2}$ vo výraze $\left(m+\frac{1}{2n}\right)^9$,
   f) x^4 vo výraze $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{12}$.

5. Určte, čomu sa rovná absolútny člen vo výraze

   a) $(x+2)^7$, b) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$, c) $\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4$,

   d) $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^7$, e) $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x^2}\right)^6$, f) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}\right)^9$.

6. Vypočítajte $(x+1)^5(x-1)^5-(x^2-1)^5$.

7. Vyjadrite pomocou jedného kombinačného čísla.

   a) $\binom{8}{3}+\binom{8}{4}$, b) $\binom{11}{7}+\binom{11}{5}$, c) $\binom{13}{9}+\binom{12}{8}+\binom{12}{7}$,

   d) $\binom{15}{4}+\binom{16}{11}+\binom{15}{12}$, e) $\binom{19}{8}+\binom{20}{7}-\binom{19}{13}$, f) $\binom{17}{4}+\binom{16}{5}-\binom{16}{13}$.

8.5 Rôzne kombinatorické úlohy

1. Koľko uhlopriečok má konvexný n-uholník?

2. Ktorý pravidelný n-uholník, $n \geq 3$, ma dvakrát toľko uhlopriečok ako strán?

3. Daný je pravidelný n-uholník, $n \geq 3$. Koľko existuje takých trojuholníkov, ktorých vrcholy sú niektoré z vrcholov tohto pravidelného n-uholníka, a zároveň žiadna strana trojuholníka nie je stranou tohto pravidelného n-uholníka?

4. Filip sa potrebuje celý týždeň učiť na dôležitú skúšku, a preto nebude mať čas variť. Nakúpil si teda štrnásť krabíc s mrazenými pizzami, jednu pizzu bude mať každý deň na obed a jednu na večeru. Štyri pizze boli ananásové, päť bolo syrových a päť bolo šampiňónových. Koľkými spôsobmi si môže naplánovať poradie jedenia pízz na ten týždeň, ak nechce ani raz jesť dvakrát ten istý druh pizze v jeden deň?

5. Ondrej dostal tri odznaky, ktoré si chce vymaľovať špeciálnymi farbami. Má červenú, oranžovú, žltú, zelenú, modrú a fialovú. Na každom odznaku je práve jedna hviezdička. Každý odznak chce vymaľovať dvomi rôznymi farbami, jednou farbou hviezdičku a druhou pozadie. Koľkými spôsobmi môže vymaľovať svoje tri odznaky, ak:

   a) chce použiť každú farbu,

   b) mu nevadí, že nepoužije každú farbu, ale nechce mať žiadne dva odznaky rovnaké,

   c) mu vadia niektoré farebné kombinácie (je presvedčený, že sa zelená nehodí k červenej, žltá k fialovej a modrá k oranžovej, takže tieto dvojice farieb nechce mať na žiadnom odznaku),

   d) nemá žiadne ďalšie požiadavky na farbenie odznakov.

8.6 Pravdepodobnosť a štatistika

1. Určte, ktoré z nasledujúcich udalostí sú možné a ktoré nemožné.

   a) Na klasickej hracej kocke padne trojka.

   b) Na klasickej hracej kocke padne štvorka.

   c) Na klasickej hracej kocke padne sedmička.

   d) Na klasickej hracej kocke padne jednotka.

   e) Na klasickej hracej kocke padne záporné číslo.

   f) Na klasickej hracej kocke padne nula.

2. Určte, ktoré z nasledujúcich udalostí určite nastali, mohli nastať alebo nemohli nastať. Ak udalosť mohla nastať, uveďte príklad, kedy nastala, a príklad, kedy nenastala.

a) Súčet čísel hodených na dvoch hracích kockách je 8.

b) Na hracej kocke padlo prirodzené číslo.

c) Súčin troch čísel, ktoré po sebe padli na hracej kocke, je 9.

d) V hazardnej hre, v ktorej sa žrebuje 5 čísel z prirodzených čísel 1 až 40, padli čísla 1, 2, 3, 4, 5.

e) Do školy prišlo 25 z 30 žiakov triedy.

f) Do školy prišlo 31 z 30 žiakov triedy.

g) Počet žiakov, ktorí prišli do školy, je prirodzené číslo.

h) V rulete padlo číslo 7.

i) V hazardnej hre, v ktorej sa žrebuje 5 čísel z prirodzených čísel 1 až 20, padli čísla, ktorých súčin je druhou mocninou prirodzeného čísla.

3. Určte pravdepodobnosť nasledujúcich udalostí pri hode klasickou hracou kockou:

a) Na kocke padlo číslo 5.

b) Na kocke padlo číslo 6.

c) Na kocke padlo číslo 7.

d) Na kocke padlo párne číslo.

e) Na kocke padlo nepárne číslo.

f) Na kocke padlo prvočíslo.

g) Na kocke padlo číslo väčšie ako 4,5.

h) Na kocke padlo prirodzené číslo.

4. Určte pravdepodobnosť nasledujúcich udalostí pri žrebovaní jedného prirodzeného čísla z čísel 1 až 15:

a) Bolo vyžrebované prvočíslo.

b) Bolo vyžrebované párne číslo.

c) Bolo vyžrebované nepárne číslo.

d) Bolo vyžrebované číslo, ktoré je druhou mocninou prirodzeného čísla.

e) Bolo vyžrebované číslo deliteľné štyrmi.

f) Bolo vyžrebované číslo deliteľné šiestimi.

g) Bolo vyžrebované číslo, ktoré obsahuje cifru 1.

h) Bolo vyžrebované číslo, ktoré obsahuje cifru 2.

i) Bolo vyžrebované číslo, ktoré neobsahuje cifru 9.

j) Bolo vyžrebované číslo, ktoré je druhou mocninou prvočísla.

5. Určte, početnosti nasledujúcich udalostí pri hode dvoma hracími kockami:

a) Padli dve prvočísla.

b) Padli dve čísla, ktorých súčin je 5.

c) Padli tri čísla.

d) Padli dve čísla, ktorých súčet je 5.

e) Padli dve čísla, ktorých súčet je 12.

f) Padli dve čísla, ktorých súčet je 15.

g) Padli dve čísla, ktorých rozdiel je 2.

h) Padli dve čísla, ktorých rozdiel je 5.

i) Padlo jedno párne a jedno nepárne číslo.

j) Padli dve čísla, ktorých súčin je 12.

k) Padli dve čísla, ktorých podiel (väčšie číslo delíme menším) je prirodzené číslo.

l) Padli dve čísla, ktorých súčin zmenšený o ich súčet je 2.

6. Vypočítajte aritmetický priemer nasledujúcich čísel:

a) 2 a 4,	b) 9 a 11,	c) 10 a 18,
d) 8 a 8,	e) 14 a 24,	f) 5 a 10,
g) 6 a 19,	h) 151 a 142,	i) 223 a 557,
j) 12,4 a 15,3,	k) 19,1 a 1,6,	l) 1,25 a 4,25,
m) 71,25 a 72,75,	n) 12,69 a 13,27,	o) 323,1 a 0,279,
p) 4,11 a 2,222,	q) 12,87 a 19,541,	r) 235,336 a 547,129.

7. Vypočítajte aritmetický priemer nasledujúcich čísel:

a) 3 a -3,	b) -3 a -6,	c) $3{,}25$ a $-1{,}25$,
d) 4 a $-0{,}27$,	e) $-15{,}23$ a $9{,}02$,	f) $-7{,}29$ a $-6{,}17$,
g) $-0{,}012$ a $0{,}046$,	h) $-9{,}99$ a $-7{,}72$,	i) $2{,}8$ a $\frac{3}{4}$,
j) $\frac{7}{8}$ a $\frac{9}{4}$,	k) $\frac{63}{11}$ a $\frac{91}{11}$,	l) $\frac{56}{9}$ a $\frac{62}{12}$,
m) $\frac{5}{17}$ a $\frac{17}{5}$,	n) $\frac{13}{8}$ a $-\frac{23}{9}$,	o) $\frac{47}{5}$ a $1{,}26$,
p) $-\frac{84}{31}$ a $-3{,}56$,	q) $2\frac{2}{3}$ a $\frac{5}{6}$,	r) $4\frac{7}{5}$ a $-2{,}6$.

8. Vypočítajte aritmetický priemer nasledujúcich čísel:

a) 7; 8; 9;

b) 12; 36; 9;

c) 12; 36; 9; 0;

d) 12; 36; 9; 0; 0;

e) 3; 27; 14; 65;

f) 2; −2; 8,2; 7,5;

g) −1,2; 17,2; −14,2; 0; −6,9; 5,1;

h) −1,2; 17,2; −14,2; 0; −6,9; 8,1;

i) $\frac{3}{7}$; $\frac{13}{5}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{11}{2}$;

j) $-\frac{5}{12}$; $\frac{2}{15}$; 2,5; −9,8;

k) $-\frac{5}{12}$; $\frac{2}{15}$; 2,5; −9,8; 0; 0;

l) $-\frac{89}{7}$; $\frac{78}{13}$; 6,15; −4,44; 14,25;

m) $5\frac{5}{51}$; $-4\frac{7}{18}$; 95; −3,14; 0; 2; 8;

n) −2,718; $3\frac{7}{12}$; −4; $1\frac{11}{16}$; −7,4; 77;

o) $3\frac{8}{15}$; $-1{,}\overline{3}$; $-5\frac{6}{7}$; 42; −9,4; 0,01;

p) $-9{,}\overline{6}$; $2\frac{4}{21}$; $-8\frac{9}{14}$; 2,4; $0{,}\overline{1}$; 0.

9. Bagrista Albert vykopal prvý deň výkop dlhý 170 metrov. Druhý deň vykopal ďalších 130 metrov. Aký bol jeho priemerný denný výkon?

10. Florián má vreckové 15 € mesačne, Boleslav 20 € a Otília 25 €. Aké priemerné vreckové majú deti? Koľko detí dostáva nadpriemerné vreckové?

11. V prieskume mesačného vreckového v triede sa zistilo, že niekoľko žiakov dostáva po 15 eur a trikrát toľko žiakov dostáva po 10 eur. Eduardovi vyšlo, že priemerné vreckové v triede je 25 eur. Počítal Eduard správne? Zdôvodnite.

12. V košíku sa nachádza 6 pomarančov s hmotnosťami 150 g, 170 g, 180 g, 165 g, 150 g, 160 g. Určte priemernú hmotnosť jedného pomaranča.

13. V skupine žiakov namerali nasledujúce výšky žiakov: 150 cm, 165 cm, 170 cm, 148 cm, 156 cm, 155 cm a 147 cm. Koľko žiakov má nadpriemernú výšku? Určte priemernú výšku žiakov s presnosťou na centimetre a s presnosťou na milimetre. Má význam určovať výšku osôb s presnosťou na milimetre?

14. V triede malo 20 žiakov jednotku z matematiky, piati mali dvojku, štyria trojku a jeden štvorku. Päťku nemal nikto. Aká bola priemerná známka z matematiky v triede s presnosťou na jedno desatinné miesto?

15. V pondelok prišlo do školy všetkých 30 žiakov triedy. V utorok ich prišlo 25, v stredu 18, vo štvrtok 22 a v piatok 25. Koľko žiakov priemerne chýbalo počas týždňa?

16. Priemerný vek žiakov v triede bol 14,5 roka. Určte, aký je vekový priemer žiakov v triede po odchode dvoch žiakov, ktorí mali 14 a 15 rokov.

17. Priemerná výška žiakov v triede je 165 cm. Odchodom najvyššieho žiaka s výškou 194 cm sa znížila priemerná výška žiakov na 164 cm. Určte počet žiakov v triede po ochode tohto žiaka.

9 Trojuholník

9.1 Trojuholníková nerovnosť

1. Zistite, či sa dá zostrojiť trojuholník, ktorý má nasledujúce dĺžky strán:

a) $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm,
b) $a = 1$ cm, $b = 1$ cm, $c = 2$ cm,
c) $a = 7$ cm, $b = 1$ cm, $c = 5$ cm,
d) $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $c = 13$ cm,
e) $a = 4$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2$ cm,
f) $a = 3$ m, $b = 4{,}5$ m, $c = 8{,}5$ m.

2. Zistite, či sa dá zostrojiť trojuholník, ktorý má nasledujúce dĺžky strán:

a) $a = 4$ m, $b = 3$ cm, $c = 4$ m,
b) $a = 1$ dm, $b = 1$ dm, $c = 2$ cm,
c) $a = 7$ mm, $b = 1$ cm, $c = 5$ mm,
d) $a = 9$ cm, $b = 12$ dm, $c = 13$ cm,
e) $a = 4$ cm, $b = 2$ dm, $c = 18$ cm,
f) $a = 3$ cm, $b = 5$ m, $c = 5$ dm.

3. Dĺžky strán trojuholníka v centimetroch sú prirodzené čísla. Určte, akú dĺžku môže mať tretia strana tohto trojuholníka, ak poznáme dĺžky dvoch jeho strán:

a) $a = 12$ cm, $b = 8$ cm,
b) $a = 3$ cm, $b = 7$ cm,
c) $a = 1$ cm, $b = 1$ cm,
d) $a = 5$ cm, $b = 5$ cm,
e) $a = 9$ cm, $b = 19$ cm,
f) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm.

4. Zistite, či nasledujúce vzdialenosti môžu byť dĺžkami základne a ramien rovnoramenného trojuholníka:

a) základňa $a = 8$ cm, rameno $b = 7$ cm,
b) základňa $a = 12$ dm, rameno $b = 5$ dm,
c) základňa $a = 1$ mm, rameno $b = 2$ m,
d) základňa $a = 3$ dm, rameno $b = 40$ cm,
e) základňa $a = 20$ cm, rameno $b = 1$ dm,
f) základňa $a = 9$ cm, rameno $b = 11$ cm.

5. Aký vzťah platí pre dĺžku základne a dĺžku ramena rovnoramenného trojuholníka?

9.2 Obvod trojuholníka

1. Určte obvod trojuholníka, ktorý má nasledujúce dĺžky strán:

a) $a = 10$ cm, $b = 20$ cm, $c = 15$ cm,

b) $e = 100$ cm, $f = 100$ cm, $g = 100$ cm,

c) $d = 13$ cm, $e = 20$ mm, $f = 12$ cm,

d) $x = 8$ dm, $y = 10$ dm, $z = 1{,}1$ m,

e) $k = 1{,}2$ m, $l = 1{,}22$ m, $m = 1{,}222$ m,

f) $o = 2$ m, $p = 4$ m, $q = 300$ cm.

2. Vypočítajte dĺžku tretej strany trojuholníka, ktorého obvod a dĺžky dvoch strán sú známe:

a) $o = 20$ m, $b = 8$ m, $c = 5$ m,

b) $o = 31$ dm, $b = 100$ cm, $c = 1\ 000$ mm,

c) $o = 2$ dm, $b = 12$ cm, $c = 5$ cm,

d) $o = 9$ m, $b = 22$ dm, $c = 330$ cm,

e) $o = 6$ dm, $b = 3$ dm, $c = 2$ cm,

f) $o = 7$ cm, $b = 5$ m, $c = 1$ dm.

3. Určte dĺžku pletiva potrebného na oplotenie pozemku tvaru trojuholníka s dĺžkami strán 100 m, 200 m, 150 m.

4. Zuzana má na vianočnú výzdobu narysovať fixkou 999 rovnostranných trojuholníkov so stranou dlhou 6 cm, z ktorých sa budú skladať vianočné stromčeky. Jedna fixka jej vystačí na narysovanie 10 000 centimetrov čiary. Koľko fixiek bude Zuzana potrebovať?

5. Určte obvod rovnoramenného trojuholníka, ak poznáte dĺžku jeho základne a ramena:

a) základňa $a = 8$ cm, rameno $b = 20$ cm,

b) základňa $a = 12$ m, rameno $b = 700$ cm,

c) základňa $c = 10$ dm, rameno $b = 10$ cm,

d) základňa $b = 7$ cm, rameno $a = 4$ cm,

e) základňa $b = 20$ cm, rameno $c = 40$ dm,

f) základňa $c = 170$ cm, rameno $c = 140$ m,

6. Obvod rovnoramenného trojuholníka je 20 cm. Určte dĺžku jeho základne a dĺžky ramien, ak viete, že rameno tohto trojuholníka má dvakrát väčšiu dĺžku ako jeho základňa.

7. Určte obvod rovnostranného trojuholníka, ak poznáte dĺžku jeho strany:

a) $a = 8$ cm, b) $a = 10$ dm, c) $a = 2$ m, d) $a = 6$ mm.

8. Určte dĺžku strany rovnostranného trojuholníka, ak poznáte jeho obvod:

a) $o = 30$ dm, b) $o = 16{,}5$ cm, c) $o = 21$ m, d) $o = 99$ cm.

9.3 Uhly trojuholníka

1. Určte súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka ABC, ak platí:

a) $\alpha = 100°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 20°$, b) $\alpha = 80°$, $\beta = 70°$, $\gamma = 30°$,
c) $\alpha = 10°$, $\beta = 1°$, $\gamma = 169°$, d) $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 60°$,
e) $\alpha = 30°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 60°$, f) $\alpha = 120°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 30°$.

2. Zistite, či existuje trojuholník s nasledujúcimi veľkosťami vnútorných uhlov:

a) $\alpha = 50°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 70°$, b) $\alpha = 60°$, $\beta = 70°$, $\gamma = 80°$,
c) $\alpha = 75°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 50°$, d) $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 80°$,
e) $\alpha = 30°40'$, $\beta = 90°$, $\gamma = 60°20'$, f) $\alpha = 99°40'$, $\beta = 56°20'$, $\gamma = 24°$.

3. Určte veľkosť tretieho vnútorného uhla trojuholníka ABC, ak poznáte veľkosti jeho dvoch vnútorných uhlov:

a) $\alpha = 80°$, $\beta = 40°$, b) $\alpha = 50°$, $\beta = 50°$, c) $\beta = 11°$, $\gamma = 19°$,
d) $\alpha = 60°$, $\gamma = 60°$, e) $\alpha = 60°$, $\gamma = 30°$, f) $\beta = 45°$, $\gamma = 45°$.

4. Určte všetky možné veľkosti zvyšných vnútorných uhlov trojuholníka ABC, ak poznáte veľkosť jedného jeho vnútorného uhla a viete, že tento trojuholník má dva vnútorné uhly rovnakej veľkosti:

a) $\alpha = 100°$, b) $\beta = 80°$, c) $\beta = 90°$,
d) $\gamma = 160°$, e) $\alpha = 30°$, f) $\gamma = 60°$.

5. Určte veľkosť tretieho vnútorného uhla pravouhlého trojuholníka ABC, ak poznáte veľkosť jedného jeho vnútorného uhla:

a) $\beta = 40°$, b) $\alpha = 55°$, c) $\gamma = 35°$,
d) $\alpha = 10°$, e) $\alpha = 4°$, f) $\beta = 85°$.

6. Zistite, či dané veľkosti uhlov môžu byť veľkosťami uhlov v ostrouhlom, pravouhlom alebo tupouhlom trojuholníku:

a) $\alpha = 40°$, $\beta = 50°$, $\gamma = 90°$, b) $\alpha = 50°$, $\beta = 70°$, $\gamma = 60°$,
c) $\alpha = 45°$, $\beta = 65°$, $\gamma = 70°$, d) $\alpha = 120°$, $\beta = 50°$, $\gamma = 10°$,
e) $\alpha = 30°20'$, $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$, f) $\alpha = 33°$, $\beta = 77°$, $\gamma = 80°$.

7. Na základe veľkostí dvoch vnútorných uhlov trojuholníka ABC zistite, či ide o ostrouhlý, pravouhlý alebo tupouhlý trojuholník:

a) $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 10^\circ$, b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ$, c) $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 40^\circ$,
d) $\alpha = 30^\circ$, $\gamma = 130^\circ$, e) $\alpha = 40^\circ$, $\gamma = 70^\circ$, f) $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 50^\circ$.

8. Určte veľkosť vnútorných uhlov pri základni rovnoramenného trojuholníka, ak poznáte veľkosti uhla oproti základni (pri hlavnom vrchole):

a) 20°, b) 150°, c) 30°, d) 90°, e) 60°, f) 45°.

9. Určte veľkosť vnútorného uhla pri hlavnom vrchole rovnoramenného trojuholníka, ak poznáte veľkosť uhla pri jeho základni:

a) 17°, b) 50°, c) 80°, d) 90°, e) 120°, f) 30°.

10. Čo môžeme povedať o trojuholníku, v ktorom sa súčet veľkostí dvoch uhlov rovná veľkosti tretieho uhla?

11. Koľko ostrých, pravých a tupých uhlov môže mať trojuholník, ktorý je

a) ostrouhlý, b) pravouhlý, c) tupouhlý?

12. Určte veľkosti vonkajších uhlov trojuholníka, ak poznáte veľkosti jeho niektorých vnútorných uhlov:

a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 82^\circ$, b) $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, c) $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 65^\circ$,
d) $\beta = 100^\circ$, $\gamma = 20^\circ$, e) $\beta = 47^\circ$, $\gamma = 85^\circ$, f) $\alpha = 29^\circ$, $\beta = 59^\circ$.

13. Určte veľkosti chýbajúcich vnútorných a vonkajších uhlov trojuholníka ABC, ak poznáte veľkosti jeho niektorých vnútorných a vonkajších uhlov:

a) $\alpha = 66^\circ$, $\beta' = 133^\circ$, b) $\alpha' = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, c) $\alpha' = 135^\circ$, $\gamma' = 165^\circ$,
d) $\beta = 97^\circ$, $\gamma' = 120^\circ$, e) $\beta' = 118^\circ$, $\gamma = 72^\circ$, f) $\alpha = 107^\circ$, $\beta' = 159^\circ$.

14. Čo môžeme povedať o trojuholníku, v ktorom majú všetky jeho vonkajšie uhly rovnakú veľkosť?

15. Čo môžeme povedať o trojuholníku, v ktorom sú všetky jeho vonkajšie uhly tupé?

16. Čo môžeme povedať o trojuholníku, v ktorom je jeden jeho vonkajší uhol pravý?

17. V rovnoramennom trojuholníku ABC má základňa AB dĺžku 5 cm a ramená majú dĺžku 10 cm. Ktorý uhol je v tomto trojuholníku najmenší a ktorý najväčší?

18. Koľko vonkajších uhlov trojuholníka môže byť ostrých?

9.4 Obsah pravouhlého trojuholníka

1. Vypočítajte obsah pravouhlého trojuholníka, ak poznáte dĺžky jeho strán:

a) $a = 3$ mm, $b = 4$ mm, $c = 5$ mm,

b) $a = 5$ cm, $b = 13$ cm, $c = 12$ cm,

c) $a = 15$ dm, $b = 17$ dm, $c = 8$ dm,

d) $a = 7$ m, $b = 24$ m, $c = 25$ m.

2. Vypočítajte obsah pravouhlého trojuholníka, ak poznáte dĺžky jeho odvesien:

a) $a = 10$ cm, $b = 8$ cm,

b) $a = 4$ dm, $b = 21$ cm,

c) $a = 3$ mm, $b = 4$ cm,

d) $a = 8$ cm, $b = 10$ cm.

3. Vypočítajte dĺžku druhej odvesny pravouhlého trojuholníka, ak poznáte jeho obsah a dĺžku jednej odvesny:

a) $S = 100$ cm^2, $b = 10$ cm,

b) $S = 330$ dm^2, $b = 5$ cm,

c) $S = 80$ cm^2, $a = 8$ cm,

d) $S = 24$ mm^2, $b = 6$ cm,

e) $S = 1$ cm^2, $b = 1$ mm,

f) $S = 70$ cm^2, $a = 5$ cm.

4. Dĺžky strán pravouhlého trojuholníka v centimetroch sú prirodzené čísla. Obsah trojuholníka je 6 cm^2. Určte obvod tohto trojuholníka.

5. Dĺžky odvesien pravouhlého trojuholníka s obsahom 10 cm^2 sú v centimetroch prirodzené čísla. Zistite, aké môžu byť dĺžky odvesien tohto trojuholníka.

6. Určte, koľko pravouhlých trojuholníkov s celočíselnými dĺžkami odvesien v centrimetroch, má obsah 15 cm^2.

9.5 Zhodnosť trojuholníkov

1. Trojuholníky DEN a NOC sú rovnostranné a majú rovnaký obvod. Musia byť tieto dva trojuholníky zhodné?

2. Štvorce $KLMN$ a $OBED$ majú rovnaký obsah. Musia byť tieto dva štvoruholníky zhodné?

3. Trojuholníky ABC a DEF sú zhodné. Zapíšte, ktoré uhly a ktoré strany majú rovnakú veľkosť.

4. Trojuholníky KTO a SPI sú zhodné. Pre veľkosti vnútorných uhlov týchto trojuholníkov platí $|\sphericalangle PIS| = 63°$, $|\sphericalangle KTO| = 70°$, $|SP| = 4$ cm. Určte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníkov KTO a SPI a stranu trojuholníka KTO, ktorá má dĺžku 4 cm.

5. Určte, ktoré z nasledujúcich trojuholníkov sú zhodné:

a) $\triangle ABC$: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm,

b) $\triangle DEF$: $d = 6$ cm, $e = 8$ cm, $f = 9$ cm,

c) $\triangle GHI$: $g = 4$ cm, $h = 5$ cm, $i = 3$ cm,

d) $\triangle KLM$: $k = 3$ cm, $l = 4$ cm, $m = 6$ cm,

e) $\triangle PQR$: $p = 5$ cm, $q = 3$ cm, $r = 4$ cm,

f) $\triangle STU$: $s = 8$ cm, $t = 9$ cm, $u = 6$ cm,

g) $\triangle XYZ$: $x = 4$ cm, $y = 6$ cm, $z = 8$ cm.

6. Určte, ktoré z nasledujúcich trojuholníkov sú zhodné s trojuholníkom XYZ, v ktorom platí $x = 10$ cm, $|\sphericalangle YZX| = 40°$ a $|\sphericalangle XYZ| = 70°$:

a) $\triangle DEF$: $f = 10$ cm, $|\sphericalangle FDE| = 70°$, $|\sphericalangle DEF| = 70°$,

b) $\triangle GHI$: $g = 10$ cm, $h = 10$ cm, $|\sphericalangle IGH| = 40°$,

c) $\triangle JKL$: $l = 10$ cm, $|\sphericalangle LJK| = 70°$, $|\sphericalangle KLJ| = 70°$,

d) $\triangle MNO$: $m = 10$ cm, $o = 10$ cm, $|\sphericalangle ONM| = 40°$,

e) $\triangle PQR$: $p = 10$ cm, $q = 8$ cm, $|\sphericalangle PRQ| = 40°$,

f) $\triangle STU$: $s = 10$ cm, $t = 10$ cm, $|\sphericalangle SUT| = 70°$.

7. Určte, ktoré z nasledujúcich trojuholníkov sú zhodné s trojuholníkom ABC, v ktorom platí $a = 2$ cm, $b = 1$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 30°$, $|\sphericalangle ACB| = 60°$:

a) $\triangle DEF$: $e = 2$ cm, $|\sphericalangle DEF| = 90°$, $|\sphericalangle EFD| = 30°$,

b) $\triangle GHI$: $g = 2$ cm, $|\sphericalangle GHI| = 90°$, $|\sphericalangle HIG| = 30°$,

c) $\triangle JKL$: $j = 1$ cm, $|\sphericalangle LKJ| = 60°$, $|\sphericalangle KLJ| = 90°$,

d) $\triangle MNO$: $o = 1$ cm, $|\sphericalangle MON| = 60°$, $|\sphericalangle OMN| = 90°$,

e) $\triangle PQR$: $p = 1$ cm, $|\sphericalangle PRQ| = 60°$, $|\sphericalangle PQR| = 30°$,

f) $\triangle STU$: $t = 2$ cm, $|\sphericalangle STU| = 60°$, $|\sphericalangle UST| = 60°$.

8. Určte, ktoré z nasledujúcich trojuholníkov sú navzájom zhodné:

a) $\triangle ABC$: $|AC| = 3$ cm, $|AB| = 5$ cm, $|\sphericalangle BAC| = 60°$,

b) $\triangle DEF$: $f = 5$ cm, $|\sphericalangle EDF| = 30°$, $|\sphericalangle DEF| = 40°$,

c) $\triangle GHI$: $g = 4$ cm, $i = 3$ cm, $|GI| = 5$ cm,

d) $\triangle JKL$: $|JL| = 5$ cm, $|\sphericalangle LJK| = 30°$, $|\sphericalangle JKL| = 110°$,

e) $\triangle MNO$: $m = 4$ cm, $|MO| = 3$ cm, $|MN| = 5$ cm,

f) $\triangle PQR$: $|PQ| = 3$ cm, $|PR| = 5$ cm, $|\sphericalangle RPQ| = 60°$,

g) $\triangle STU$: $t = 4$ cm, $u = 5$ cm, $|\sphericalangle UST| = 40°$.

9.6 Podobnosť trojuholníkov

1. Trojuholníky GHI a JKL sú podobné. Zapíšte, ktoré uhly majú rovnakú veľkosť, a ktoré pomery dĺžok zodpovedajúcich si strán sa rovnajú.

2. Trojuholníky ABC a DEF sú podobné s pomerom podobnosti 2. Pre tieto trojuholníky platí $|\sphericalangle ABC| = 60°$, $|\sphericalangle EFD| = 73°$, $|AB| = 4$ cm. Určte veľkosti ostatných vnútorných uhlov trojuholníkov ABC a DEF a dĺžku aspoň jednej strany trojuholníka DEF.

3. Určte, ktoré z nasledujúcich trojuholníkov sú podobné:

a) $\triangle ABC$: $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm,

b) $\triangle DEF$: $d = 10$ cm, $e = 6$ cm, $f = 12$ cm,

c) $\triangle GHI$: $g = 6$ cm, $h = 8$ cm, $i = 10$ cm,

d) $\triangle KLM$: $k = 3$ cm, $l = 4$ cm, $m = 6$ cm,

e) $\triangle PQR$: $p = 10$ cm, $q = 6$ cm, $r = 8$ cm,

f) $\triangle STU$: $s = 3$ cm, $t = 6$ cm, $u = 5$ cm,

g) $\triangle XYZ$: $x = 4$ cm, $y = 6$ cm, $z = 5$ cm.

4. Určte, ktoré z nasledujúcich trojuholníkov sú podobné s trojuholníkom ABC, v ktorom platí $a = 20$ cm, $|\sphericalangle BCA| = 50°$ a $|\sphericalangle ABC| = 65°$:

a) $\triangle DEF$: $f = 10$ cm, $|\sphericalangle FDE| = 65°$, $|\sphericalangle DEF| = 65°$,

b) $\triangle GHI$: $g = 15$ cm, $h = 15$ cm, $|\sphericalangle IGH| = 50°$,

c) $\triangle JKL$: $l = 8$ cm, $|\sphericalangle LJK| = 65°$, $|\sphericalangle KLJ| = 65°$,

d) $\triangle MNO$: $m = 7$ cm, $o = 7$ cm, $|\sphericalangle ONM| = 50°$,

e) $\triangle PQR$: $p = 20$ cm, $q = 15$ cm, $|\sphericalangle PRQ| = 50°$,

f) $\triangle STU$: $s = 20$ cm, $t = 20$ cm, $|\sphericalangle SUT| = 65°$.

5. Určte, ktoré z nasledujúcich trojuholníkov sú podobné s trojuholníkom ABC, v ktorom platí $a = 8$ cm, $b = 4$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 30°$, $|\sphericalangle ACB| = 60°$:

a) $\triangle DEF$: $e = 4$ cm, $|\sphericalangle DEF| = 90°$, $|\sphericalangle EFD| = 30°$,

b) $\triangle GHI$: $h = 3$ cm, $|\sphericalangle GHI| = 90°$, $|\sphericalangle HIG| = 30°$,

c) $\triangle JKL$: $j = 1$ cm, $|\sphericalangle LKJ| = 60°$, $|\sphericalangle KLJ| = 90°$,

d) $\triangle MNO$: $o = 2$ cm, $|\sphericalangle MON| = 60°$, $|\sphericalangle OMN| = 90°$,

e) $\triangle PQR$: $p = 8$ cm, $|\sphericalangle PRQ| = 60°$, $|\sphericalangle PQR| = 30°$,

f) $\triangle STU$: $t = 4$ cm, $|\sphericalangle STU| = 60°$, $|\sphericalangle UST| = 60°$.

6. Určte, ktoré z nasledujúcich trojuholníkov sú navzájom podobné, a určte ich pomer podobnosti:

a) $\triangle ABC$: $|AC| = 9$ cm, $|AB| = 15$ cm, $|\sphericalangle BAC| = 60°$,

b) $\triangle DEF$: $f = 8$ cm, $|\sphericalangle EDF| = 30°$, $|\sphericalangle DEF| = 40°$,

c) $\triangle GHI$: $g = 44$ cm, $i = 33$ cm, $|GI| = 55$ cm,

d) $\triangle JKL$: $|JL| = 5$ cm, $|\sphericalangle LJK| = 30°$, $|\sphericalangle JKL| = 110°$,

e) $\triangle MNO$: $m = 52$ cm, $|MO| = 39$ cm, $|MN| = 65$ cm,

f) $\triangle PQR$: $|PQ| = 6$ cm, $|PR| = 10$ cm, $|\sphericalangle RPQ| = 60°$,

g) $\triangle STU$: $t = 4$ cm, $u = 5$ cm, $|\sphericalangle UST| = 40°$.

7. Určte, ktoré z nasledujúcich trojuholníkov sú navzájom podobné:

a) $\triangle ABC$: $|\sphericalangle BAC| = 50°$, $|\sphericalangle ABC| = 60°$,

b) $\triangle DEF$: $|\sphericalangle EDF| = 60°$, $|\sphericalangle DEF| = 60°$,

c) $\triangle GHI$: $|\sphericalangle IGH| = 40°$, $|\sphericalangle GIH| = 70°$,

d) $\triangle JKL$: $|\sphericalangle JKL| = 50°$, $|\sphericalangle JLK| = 70°$,

e) $\triangle MNO$: $|\sphericalangle NMO| = 70°$, $|\sphericalangle MON| = 70°$,

f) $\triangle PQR$: $|\sphericalangle PRQ| = 40°$, $|\sphericalangle RPQ| = 50°$,

g) $\triangle STU$: $|\sphericalangle TUS| = 60°$, $|\sphericalangle UST| = 60°$,

h) $\triangle XYZ$: $|\sphericalangle XYZ| = 60°$, $|\sphericalangle YXZ| = 70°$.

8. Zistite, či sú nasledujúce dvojice trojuholníkov podobné. Ak áno, zapíšte podobnosť a určte ich pomer podobnosti.

a) $\triangle ABC$: $|AC| = 10$ cm, $|AB| = 15$ cm, $|\sphericalangle BAC| = 70°$,
$\triangle DEF$: $|EF| = 8$ cm, $|ED| = 12$ cm, $|\sphericalangle DEF| = 70°$,

b) $\triangle DEF$: $f = 14$ cm, $|\sphericalangle FDE| = 80°$, $|\sphericalangle FED| = 40°$,
$\triangle XYZ$: $y = 8$ cm, $|\sphericalangle ZYX| = 60°$, $|\sphericalangle ZXY| = 40°$,

c) $\triangle GHI$: $g = 20$ cm, $i = 24$ cm, $|GI| = 32$ cm,
$\triangle EPL$: $e = 40$ cm, $p = 30$ cm, $l = 25$ cm,

d) $\triangle JKL$: $|JL| = 20$ cm, $|\sphericalangle LJK| = 40°$, $|\sphericalangle JKL| = 100°$,
$\triangle DEN$: $n = 5$ m, $|\sphericalangle NED| = 40°$, $|\sphericalangle NDE| = 40°$,

e) $\triangle MNO$: $m = 12$ cm, $|MO| = 13$ cm, $|MN| = 14$ cm,
$\triangle LUC$: $l = 14$ cm, $u = 15$ cm, $c = 16$ cm,

f) $\triangle PQR$: $q = 4$ cm, $r = 6$ cm, $|\sphericalangle RPQ| = 40°$,
$\triangle DUB$: $d = 6$ cm, $b = 9$ cm, $|\sphericalangle DUB| = 40°$,

g) $\triangle STU$: $|ST| = 6$ cm, $|SU| = 8$ cm, $|\sphericalangle UST| = 60°$,
$\triangle NOC$: $n = 12$ cm, $o = 16$ cm, $|\sphericalangle ONC| = 60°$.

9. Určte dĺžky strán trojuholníka, ktorý je podobný s uvedeným trojuholníkom s daným pomerom podobnosti:

a) $\triangle ABC$, $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm, $k = 2$,

b) $\triangle DEF$, $d = 11$ cm, $e = 6$ cm, $f = 7$ cm, $k = 1{,}2$,

c) $\triangle GHI$, $g = 8$ cm, $h = 16$ cm, $i = 18$ cm, $k = 0{,}25$,

d) $\triangle JKL$, $j = 10$ cm, $k = 15$ cm, $l = 20$ cm, $k = 0{,}2$,

e) $\triangle MNO$, $m = 4{,}2$ cm, $n = 2{,}8$ cm, $o = 3{,}5$ cm, $k = \frac{10}{7}$,

f) $\triangle PQR$, $p = 12$ m, $q = 14$ m, $r = 150$ cm, $k = 2$.

10. Magdaléna si všimla, že dĺžka jej tieňa je rovnaká ako jej výška. Akú majú výšku Magdaléna a jej otec Tadeáš, ak má Magdalénin tieň dĺžku 1,35 metra a Tadeášov 178 centimetrov?

11. V rovnoramennom trojuholníku ABC má jeden uhol veľkosť 80°. V rovnoramennom trojuholníku XYZ má jeden uhol veľkosť 40°. Môžu byť tieto dva trojuholníky podobné?

12. V rovnoramennom trojuholníku ABC má jeden uhol veľkosť 90°. V rovnoramennom trojuholníku XYZ má jeden uhol veľkosť 40°. Môžu byť tieto dva trojuholníky podobné?

13. V rovnoramennom trojuholníku ABC má jeden uhol veľkosť 100°. V rovnoramennom trojuholníku XYZ má jeden uhol veľkosť 40°. Viete s istotou povedať, či sú tieto dva trojuholníky podobné?

14. Trojuholník ABC má obvod 85 cm. Trojuholník DEF je podobný s trojuholníkom ABC s pomerom podobnosti 2,4. Určte obvod trojuholníka DEF.

15. Trojuholník ABC má obsah 12 cm^2. Trojuholník SUP je podobný s trojuholníkom ABC s pomerom podobnosti 4. Určte obsah trojuholníka SUP.

16. Dĺžky strán trojuholníka ABC s obvodom 18 cm sú v pomere 3 : 4 : 5. Určte ich dĺžky. Čo vieme povedať o uhloch v trojuholníku ABC?

17. Dĺžky strán trojuholníka HEJ s obvodom 21 cm sú v pomere 3 : 3 : 1. Určte ich dĺžky. Čo vieme povedať o uhloch v trojuholníku HEJ?

18. Dĺžky strán trojuholníka ABC sú 21 cm, 27 cm a 30 cm. Určte dĺžky strán trojuholníka DEF, ktorého najdlhšia strana má dĺžku 20 cm, ak viete, že tieto dva trojuholníky sú podobné.

19. Určte približnú výšku komína, ktorý vrhá tieň dlhý 20 metrov, ak viete, že v rovnakom čase vedľa neho stojaci stĺp verejného osvetlenia vysoký 7 metrov vrhá tieň dlhý 4 metre.

9.7 Pytagorova veta

1. Určte, ktoré strany trojuholníka sú odvesny a prepony v nasledujúcich pravouhlých trojuholníkoch ABC zadaných dĺžkami strán:

a) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 3$ cm,

b) $a = 20$ mm, $b = 21$ mm, $c = 29$ mm,

c) $a = 15$ cm, $b = 8$ cm, $c = 17$ cm,

d) $a = 12$ m, $b = 13$ m, $c = 500$ cm,

e) $a = 33$ dm, $b = 56$ dm, $c = 65$ dm,

f) $a = 3{,}7$ dm, $b = 120$ mm, $c = 35$ cm.

2. Určte, ktoré uhly sú v nasledujúcich pravouhlých trojuholníkoch pravé:

a) $\triangle ABC$: $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm,

b) $\triangle DEF$: $d = 7$ m, $e = 25$ m, $f = 24$ m,

c) $\triangle GHI$: $g = 40$ cm, $h = 41$ cm, $i = 9$ cm,

d) $\triangle JKL$: $j = 12$ dm, $k = 5$ dm, $l = 13$ dm,

e) $\triangle MNO$: $m = 170$ cm, $n = 15$ dm, $o = 800$ mm,

f) $\triangle PQR$: $p = 6$ m, $q = 910$ cm, $r = 109$ dm.

3. Zapíšte Pytagorovu vetu v nasledujúcich pravouhlých trojuholníkoch pomocou dĺžok ich strán aj číselne:

a) $\triangle ABC$: $a = 12$ cm, $b = 13$ cm, $c = 5$ cm,

b) $\triangle DEF$: $d = 39$ cm, $e = 80$ cm, $f = 89$ cm,

c) $\triangle GHI$: $g = 77$ cm, $h = 85$ cm, $i = 36$ cm,

d) $\triangle JKL$: $j = 30$ cm, $k = 5$ dm, $l = 40$ cm,

e) $\triangle MNO$: $m = 51$ cm, $n = 14$ dm, $o = 149$ cm,

f) $\triangle PQR$: $p = 45$ m, $q = 530$ dm, $r = 280$ dm.

4. Určte, či sú nasledujúce trojuholníky pravouhlé:

a) $\triangle ABC$: $a = 16$ cm, $b = 63$ cm, $c = 65$ cm,

b) $\triangle DEF$: $d = 7$ m, $e = 8$ m, $f = 9$ m,

c) $\triangle GHI$: $g = 6$ dm, $h = 91$ cm, $i = 109$ cm,

d) $\triangle JKL$: $j = 312$ dm, $k = 313$ dm, $l = 25$ dm,

e) $\triangle MNO$: $m = 365$ cm, $n = 27$ cm, $o = 3\,640$ mm,

f) $\triangle PQR$: $p = 3$ dm, $q = 14$ dm, $r = 12$ dm,

g) $\triangle STU$: $s = 36$ m, $t = 323$ m, $u = 325$ dm,

h) $\triangle XYZ$: $x = 1{,}5$ dm, $y = 113$ cm, $z = 1{,}12$ m,

i) $\triangle DOM$: $d = 15$ m, $o = 17$ m, $m = 18$ dm,

j) $\triangle BOD$: $b = 40$ cm, $o = 18$ dm, $d = 2$ m.

5. Určte dĺžku prepony v nasledujúcich pravouhlých trojuholníkoch, ak poznáte dĺžky oboch odvesien:

a) $\triangle ABC$: $a = 5$ cm, $b = 12$ cm,
b) $\triangle DEF$: $d = 20$ m, $e = 21$ m,
c) $\triangle GHI$: $g = 30$ dm, $i = 400$ cm,
d) $\triangle JKL$: $k = 9$ dm, $l = 12$ dm,
e) $\triangle MNO$: $m = 24$ cm, $n = 45$ cm,
f) $\triangle PQR$: $q = 36$ dm, $r = 77$ dm,
g) $\triangle STU$: $s = 12$ m, $u = 20{,}9$ m,
h) $\triangle XYZ$: $x = 15$ m, $y = 15$ m,
i) $\triangle CRN$: $c = 10$ cm, $n = 20$ cm,
j) $\triangle SAD$: $s = 20$ dm, $d = 2$ cm.

6. Určte dĺžku druhej odvesny v nasledujúcich pravouhlých trojuholníkoch, ak poznáte dĺžku jednej odvesny a dĺžku prepony:

a) $\triangle ABC$: $a = 16$ cm, $b = 34$ cm,
b) $\triangle DEF$: $d = 60$ m, $e = 61$ m,
c) $\triangle GHI$: $g = 99$ dm, $h = 101$ dm,
d) $\triangle JKL$: $k = 63$ dm, $l = 65$ dm,
e) $\triangle MNO$: $m = 18$ cm, $n = 82$ cm,
f) $\triangle PQR$: $q = 39$ dm, $r = 89$ dm,
g) $\triangle STU$: $s = 156$ m, $t = 205$ m,
h) $\triangle XYZ$: $x = 15$ m, $y = 10$ m,
i) $\triangle ZUB$: $z = 16$ cm, $u = 13$ cm,
j) $\triangle KRB$: $k = 12{,}5$ dm, $r = 8$ cm.

7. Určte možné dĺžky tretej strany v nasledujúcich pravouhlých trojuholníkoch, ak poznáte dĺžky dvoch strán a informáciu o veľkosti jedného vnútorného uhla:

a) $\triangle ABC$: $a = 52$ cm, $c = 20$ cm, $|\sphericalangle BAC| = 90°$,

b) $\triangle DEF$: $d = 8$ cm, $e = 15$ cm, $|\sphericalangle DFE| = 90°$,

c) $\triangle GHI$: $g = 21$ dm, $h = 221$ dm, $|\sphericalangle GHI| = 90°$,

d) $\triangle JKL$: $j = 51$ cm, $l = 140$ cm, $|\sphericalangle JKL| = 90°$,

e) $\triangle MNO$: $n = 6$ mm, $o = 7$ mm, $|\sphericalangle NMO| = 90°$,

f) $\triangle PQR$: $p = 12$ dm, $r = 5$ dm, $|\sphericalangle QPR| < 90°$,

g) $\triangle STU$: $s = 15$ m, $t = 25$ m, $|\sphericalangle UST| < 90°$,

h) $\triangle XYZ$: $x = 11$ m, $y = 9$ m, $|\sphericalangle ZXY| < 90°$,

i) $\triangle BOK$: $b = 8$ cm, $o = 8$ cm, $|\sphericalangle OBK| = 45°$,

j) $\triangle LES$: $l = 2$ dm, $s = 1$ dm, $|\sphericalangle LES| = 60°$.

8. Obsah pravouhlého trojuholníka s celočíselnými dĺžkami strán je 30 cm^2. Určte dĺžky jeho strán.

9. Obvod pravouhlého trojuholníka s celočíselnými dĺžkami strán je 24 dm. Určte dĺžky jeho strán.

10. Určte dĺžky strán pravouhlého trojuholníka $\triangle ABC$ s obsahom 60 cm^2, ak viete, že jedna jeho odvesna má dĺžku 10 cm.

11. Obsah pravouhlého rovnoramenného trojuholníka je 200 cm^2. Určte jeho obvod.

12. Určte dĺžku výšky na preponu v pravouhlom trojuholníku, ktorého odvesny majú dĺžku 8 m a 15 m.

13. Určte dĺžku ťažnice na preponu pravouhlého trojuholníka s odvesnami, ktoré majú dĺžku 7 cm a 24 cm.

14. Dĺžky odvesien pravouhlého trojuholníka sú v pomere $8 : 15$. Určte jeho obvod a obsah, ak viete, že jeho prepona má dĺžku 51 cm.

15. Určte dĺžku ramien a obvod rovnoramenného trojuholníka, ktorého základňa má dĺžku 6 cm a jeho obsah je 12 cm^2.

16. Vypočítajte obsah rovnostranného trojuholníka so stranou dlhou 7 dm.

17. Vypočítajte obsah rovnostranného trojuholníka, ktorého obvod je 18 cm.

18. Vypočítajte dĺžku uhlopriečky štvorca so stranou dlhou 17 cm.

19. Vypočítajte dĺžku uhlopriečky obdĺžnika so stranami dlhými 9 cm a 4 dm.

20. Vypočítajte obvod a obsah obdĺžnika, ktorého jedna strana má dĺžku 15 cm a uhlopriečka má dĺžku 17 cm.

21. Vypočítajte dĺžky telesových uhlopriečok kvádra s hranami dlhými 12 cm, 16 cm a 99 cm.

22. Uhlopriečky kosoštvorca majú dĺžky 16 cm a 30 cm. Určte jeho obvod a obsah.

23. Vypočítajte dĺžku ramien pravouhlého lichobežníka s dĺžkami základní 28 cm a 40 cm a výškou 35 cm.

24. Dĺžky základní rovnoramenného lichobežníka sú 44 cm a 100 cm, jeho výška má dĺžku 45 cm. Určte obvod a obsah tohto lichobežníka.

25. Daná je úsečka dĺžky 1. Zostrojte úsečku dĺžky $\sqrt{5}$.

26. Daná je úsečka dĺžky 1. Zostrojte úsečku dĺžky $\sqrt{6}$.

27. Daná je úsečka dĺžky 1. Zostrojte úsečku dĺžky $\sqrt{11}$.

28. Daná je úsečka dĺžky $\sqrt{8}$. Zostrojte úsečku dĺžky 1.

29. * Zistite, koľko obdĺžnikov s celočíselnými dĺžkami strán môže mať uhlopriečku dlhú 65 cm.

30. *Trojuholník je ostrouhlý práve vtedy, keď je súčet druhých mocnín dĺžok jeho dvoch ľubovoľných strán väčší ako druhá mocnina dĺžky jeho tretej strany. Trojuholník je tupouhlý práve vtedy, keď je súčet druhých mocnín dĺžok niektorých dvoch jeho strán väčší ako druhá mocnina dĺžky jeho tretej strany. Tupý uhol potom leží oproti tejto tretej strane. Určte, ktoré z nasledujúcich trojuholníkov sú ostrouhlé, pravouhlé a ktoré tupouhlé. V prípade pravouhlých a tupouhlých trojuholníkov uveďte, ktorý uhol je najväčší.

a) $\triangle ABC$: $a = 5$ cm, $b = 9$ cm, $c = 10$ cm,

b) $\triangle DEF$: $d = 4$ m, $e = 4$ m, $f = 4$ m,

c) $\triangle GHI$: $g = 9$ dm, $h = 40$ cm, $i = 6$ dm,

d) $\triangle JKL$: $j = 12$ mm, $k = 11$ mm, $l = 8$ mm,

e) $\triangle MNO$: $m = 8$ km, $n = 13$ km, $o = 6\,000$ m,

f) $\triangle PQR$: $p = 600$ mm, $q = 50$ cm, $r = 90$ cm,

g) $\triangle STU$: $s = 5$ m, $t = 60$ dm, $u = 700$ cm,

h) $\triangle XYZ$: $x = 14$ dm, $y = 1$ m, $z = 50$ cm,

i) $\triangle TRN$: $t = 12$ m, $r = 13$ m, $n = 5$ m,

j) $\triangle KRT$: $k = 17$ cm, $r = 23$ cm, $t = 15$ cm,

k) $\triangle HAM$: $h = 2{,}5$ dm, $a = 4{,}5$ dm, $m = 3{,}5$ dm,

l) $\triangle PUK$: $p = 4{,}7$ mm, $u = 4{,}7$ mm, $k = 6{,}5$ mm.

9.8 Kosínusová veta

1. Vypočítajte dĺžku strany c v trojuholníku ABC s presnosťou na dve desatinné miesta, ak je dané:

a) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $\gamma = 90°$,

b) $a = 7$ cm, $b = 7$ cm, $\gamma = 60°$,

c) $a = 5$ cm, $b = 9$ cm, $\gamma = 45°$,

d) $a = 11$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 30°$,

e) $a = 3$ cm, $b = 6$ cm, $\gamma = 120°$,

f) $a = 5$ cm, $b = 14$ cm, $\gamma = 135°$,

g) $a = 10$ cm, $b = 7$ cm, $\gamma = 150°$,

h) $a = 4$ cm, $b = 7$ cm, $\gamma = 36°$,

i) $a = 5$ cm, $b = 8$ cm, $\gamma = 72°$,

j) $a = 7$ cm, $b = 14$ cm, $\gamma = 60°$,

k) $a = 12$ cm, $b = 9$ cm, $\gamma = 75°$,

l) $a = 2{,}5$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 140°$.

2. Vypočítajte dĺžku strany b v trojuholníku ABC s presnosťou na dve desatinné miesta, ak je dané:

a) $a = 10$ cm, $c = 5$ cm, $\gamma = 30°$,
b) $a = 3$ cm, $c = 3$ cm, $\gamma = 60°$,
c) $a = 5$ cm, $c = 13$ cm, $\gamma = 90°$,
d) $a = 12$ cm, $c = 9$ cm, $\gamma = 45°$,
e) $a = 15$ cm, $c = 12$ cm, $\gamma = 75°$,
f) $a = 15$ cm, $c = 18$ cm, $\gamma = 75°$,
g) $a = 24$ cm, $c = 22$ cm, $\gamma = 120°$,
h) $a = 18$ cm, $c = 20$ cm, $\gamma = 120°$,
i) $a = 8$ cm, $c = 3{,}5$ cm, $\gamma = 25°$,
j) $a = 10$ cm, $c = 7$ cm, $\gamma = 30°$,
k) $a = 8$ cm, $c = 7$ cm, $\gamma = 60°$,
l) $a = 4$ cm, $c = 3$ cm, $\gamma = 15°$.

3. Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov v trojuholníku ABC s presnosťou na dve desatinné miesta, ak je dané:

a) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm,
b) $a = 13$ cm, $b = 2$ cm, $c = 14$ cm,
c) $a = 8$ km, $b = 10$ km, $c = 8$ km,
d) $a = 6$ cm, $b = 17$ cm, $c = 9$ cm,
e) $a = 15$ cm, $b = 13$ cm, $c = 7$ cm,
f) $a = 5$ mm, $b = 7$ mm, $c = 6$ mm,
g) $a = 11$ m, $b = 17$ m, $c = 13$ m,
h) $a = 14$ dm, $b = 9$ dm, $c = 6$ dm,
i) $a = 6$ cm, $b = 3$ cm, $c = 3\sqrt{3}$ cm,
j) $a = 5$ cm, $b = 5\sqrt{2}$ cm, $c = 5$ cm,
k) $a = 16$ m, $b = 13$ m, $c = 14$ m,
l) $a = 12$ dm, $b = 5$ dm, $c = 8$ dm.

4. Vypočítajte dĺžku strany c a veľkosti vnútorných uhlov v trojuholníku ABC s presnosťou na dve desatinné miesta, ak je dané:

a) $a = 16$ m, $b = 15$ m, $t_a = 13$ m,
b) $a = 14$ m, $b = 25$ m, $t_a = 24$ m,
c) $a = 10$ cm, $b = 5$ cm, $t_a = 5$ cm,
d) $a = 5$ cm, $b = 8$ cm, $t_a = 9$ cm,
e) $a = 6$ cm, $b = 9$ cm, $t_a = 5$ cm,
f) $a = 5$ cm, $b = 2$ cm, $t_a = 2$ cm.

5. Vypočítajte dĺžky zvyšných strán a veľkosti vnútorných uhlov v trojuholníku ABC s presnosťou na dve desatinné miesta, ak je dané:

a) $\alpha = 60°$, $c = 9$ cm, $t_b = 9$ cm,
b) $\alpha = 45°$, $c = 6$ cm, $t_b = 5$ cm,
c) $\alpha = 40°$, $c = 12$ cm, $t_b = 7$ dm,
d) $\alpha = 30°$, $c = 14$ cm, $t_b = 7$ cm,
e) $\alpha = 50°$, $c = 11$ cm, $t_b = 9$ cm,
f) $\alpha = 120°$, $c = 4$ mm, $t_b = 9$ mm.

6. Vypočítajte dĺžky zvyšných strán a veľkosti vnútorných uhlov v trojuholníku ABC s presnosťou na dve desatinné miesta, ak je dané:

a) $\alpha = 150°$, $c = 14$ cm, $t_c = 9$ cm,
b) $\alpha = 115°$, $c = 13$ cm, $t_c = 6$ cm,
c) $\alpha = 35°$, $c = 0{,}7$ dm, $t_c = 3$ cm,
d) $\alpha = 60°$, $c = 10$ mm, $t_c = 7$ mm,
e) $\alpha = 45°$, $c = 18$ cm, $t_c = 80$ mm,
f) $\alpha = 54°$, $c = 12$ cm, $t_c = 5$ cm.

7. Vypočítajte dĺžku ťažnice t_c v trojuholníku ABC s presnosťou na dve desatinné miesta, ak je dané:

a) $\alpha = 30°$, $b = 14$ cm, $c = 14$ cm, b) $\alpha = 45°$, $b = 8$ cm, $c = 12$ cm,
c) $\alpha = 120°$, $b = 15$ cm, $c = 16$ cm, d) $\alpha = 60°$, $b = 15$ cm, $c = 16$ cm,
e) $\alpha = 75°$, $b = 15$ cm, $c = 24$ cm, f) $\alpha = 150°$, $b = 8$ cm, $c = 6$ cm.

8. Vypočítajte dĺžku ťažnice t_a v trojuholníku ABC s presnosťou na dve desatinné miesta, ak je dané:

a) $\alpha = 135°$, $b = 14$ cm, $c = 9$ cm, b) $\alpha = 20°$, $b = 5$ cm, $c = 12$ cm,
c) $\alpha = 90°$, $b = 12$ cm, $c = 5$ cm, d) $\alpha = 45°$, $b = 11$ cm, $c = 6$ cm,
e) $\alpha = 150°$, $b = 13$ cm, $c = 11$ cm, f) $\alpha = 54°$, $b = 14$ cm, $c = 23$ cm.

9. V rovnobežníku $ABCD$ má strana AB dĺžku 14 cm a strana BC dĺžku 11 cm. Veľkosť vnútorného uhla pri vrchole C je 35°. Vypočítajte dĺžky oboch uhlopriečok tohto rovnobežníka s presnosťou na dve desatinné miesta.

10. V rovnobežníku $ABCD$ má strana AB dĺžku 12 cm a dĺžka dlhšej uhlopriečky je 19 cm. Veľkosť vnútorného uhla pri vrchole D je 50°. Vypočítajte dĺžku strany BC a dĺžku kratšej uhlopriečky tohto rovnobežníka s presnosťou na dve desatinné miesta.

11. V rovnobežníku $ABCD$ má strana AB dĺžku 15 cm a dĺžka kratšej uhlopriečky je 12 cm. Veľkosť vnútorného uhla pri vrchole B je 132°. Vypočítajte dĺžku strany BC a dĺžku dlhšej uhlopriečky tohto rovnobežníka s presnosťou na dve desatinné miesta.

12. V rovnobežníku $ABCD$ uhlopriečky zvierajú uhol 60° a jedna z nich je dvakrát dlhšia ako druhá. Vypočítajte pomer dĺžky strany AB k dĺžke strany BC v tomto rovnobežníku s presnosťou na dve desatinné miesta.

13. V trojuholníku ABC ťažnica na stranu b a ťažnica na stranu c zvierajú uhol 54° a platí $t_b = 24$ cm, $t_c = 18$ cm. Vypočítajte dĺžky strán trojuholníka ABC s presnosťou na dve desatinné miesta.

14. V trojuholníku ABC platí: $|BC| = 15$ cm, $t_b = 12$ cm a $t_c = 18$ cm. Vypočítajte dĺžky strán AB a CA s presnosťou na dve desatinné miesta.

15. * Dĺžky strán trojuholníka ABC vyjadrené v metroch sú celočíselné a sú to tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Aké sú dĺžky strán tohto trojuholníka, ak trojuholník má čo najmenší možný obvod a jeden z vnútorných uhlov tohto trojuholníka má veľkosť

a) 90°, b) 120°, c) viac ako 150°, d) menej ako 15°.

16. Rovnoramenný lichobežník $ABCD$ má základne AB, CD a ramená BC, DA. Vypočítajte dĺžky jeho uhlopriečok s presnosťou na dve desatinné miesta, ak:

a) $|AB| = 12$ cm, $|BC| = |DA| = 5$ cm, $|CD| = 3$ cm,

b) $|AB| = 4$ cm, $|BC| = |DA| = 4$ cm, $|CD| = 7$ cm,

c) $|AB| = 8$ cm, $|BC| = |DA| = 5$ cm, $|CD| = 3$ cm,

d) $|AB| = 12$ cm, $|BC| = |DA| = 4$ cm, $|CD| = 3$ cm.

17. V rovnobežníku $ABCD$ je dĺžka kratšej uhlopriečky rovnaká ako dĺžka kratšej strany a dĺžka dlhšej uhlopriečky 1,5-násobok dĺžky dlhšej strany. Vypočítajte pomer dĺžok kratšej a dlhšej strany tohto rovnobežníka.

18. V trojuholníku ABC je strana b o 4 cm dlhšia ako strana a, strana c je dvakrát dlhšia ako strana a a veľkosť jedného z jeho vnútorných uhlov je 60°. Vypočítajte presne dĺžky strán trojuholníka ABC. Nájdite všetky možnosti.

9.9 Sínusová veta

1. Vypočítajte dĺžku strany b v trojuholníku ABC s presnosťou na dve desatinné miesta, ak je dané:

a) $a = 13$ cm, $\alpha = 90°$, $\beta = 30°$,

b) $a = 13$ cm, $\alpha = 15°$, $\beta = 70°$,

c) $a = 7$ cm, $\alpha = 150°$, $\beta = 45°$,

d) $a = 6$ cm, $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$,

e) $a = 3$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 15°$,

f) $a = 4$ cm, $\alpha = 30°$, $\beta = 120°$.

2. Vypočítajte veľkosť uhla β v trojuholníku ABC s presnosťou na dve desatinné miesta, ak je dané:

a) $a = 15$ cm, $b = 10$ cm, $\alpha = 45°$,

b) $a = 4$ cm, $b = 8$ cm, $\alpha = 30°$,

c) $a = 7$ cm, $b = 12$ cm, $\alpha = 25°$,

d) $a = 11$ cm, $b = 13$ cm, $\alpha = 72°$,

e) $a = 4$ cm, $b = 9$ cm, $\alpha = 15°$,

f) $a = 8$ cm, $b = 5$ cm, $\alpha = 120°$.

3. V trojuholníku ABC platí $a = 10$ cm, $\beta = 30°$. Určte všetky možné dĺžky strany b, pre ktoré

a) existujú aspoň dva také trojuholníky ABC,

b) existuje práve jeden taký trojuholník ABC,

c) neexistuje žiadny taký trojuholník ABC.

4. V trojuholníku ABC platí $\sin\alpha = 0{,}5$, $\sin\beta = 0{,}6$, $a = 10$ cm. Určte, koľko takých trojuholníkov existuje.

5. V trojuholníku ABC platí $a = 6$ cm, $b = 12$ cm. Určte všetky možné veľkosti vnútorného uhla α tohto trojuholníka, pre ktoré

a) existujú aspoň dva také trojuholníky ABC,

b) existuje práve jeden taký trojuholník ABC,

c) neexistuje žiadny taký trojuholník ABC.

6. Vypočítajte dĺžky zvyšných strán a veľkosti vnútorných uhlov v trojuholníku ABC s presnosťou na dve desatinné miesta, ak je dané:

a) $\alpha = 120°$, $a = 6$ cm, $c = 5$ cm,
b) $\alpha = 25°$, $a = 7$ cm, $c = 12$ cm,
c) $\beta = 50°$, $b = 12$ cm, $c = 14$ cm,
d) $\beta = 45°$, $b = 8$ cm, $c = 13$ cm,
e) $\gamma = 150°$, $a = 8$ cm, $c = 13$ cm,
f) $\alpha = 75°$, $\beta = 40°$, $b = 15$ cm.

7. V trojuholníku ABC sú veľkosti dvoch vnútorných uhlov $20°$ a $40°$. Najkratšia strana má dĺžku 7 cm. Vypočítajte s presnosťou na dve desatinné miesta dĺžky zvyšných strán trojuholníka ABC.

8. V trojuholníku ABC sú veľkosti dvoch vnútorných uhlov $45°$ a $60°$. Jedna zo strán trojuholníka má dĺžku 15 cm. Vypočítajte s presnosťou na dve desatinné miesta dĺžky zvyšných strán trojuholníka ABC. Nájdite všetky možnosti.

9. V trojuholníku ABC sú veľkosti dvoch strán 15 cm a 12 cm, jeden z vnútorných uhlov má veľkosť $30°$. Vypočítajte s presnosťou na dve desatinné miesta veľkosti zvyšných vnútorných uhlov a dĺžku strany trojuholníka ABC. Nájdite všetky možnosti.

10. Trojuholník ABC má obvod 42 cm a veľkosti dvoch vnútorných uhlov $20°$ a $40°$. Vypočítajte s presnosťou na dve desatinné miesta dĺžky všetkých strán trojuholníka ABC. Nájdite všetky možnosti.

11. V rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou AB, ktorá má dĺžku 10 cm, delí os uhla β stranu AC v pomere $1 : 2$. Vypočítajte s presnosťou na dve desatinné miesta dĺžku strany AC a veľkosť uhla γ.

12. V rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou AB zviera os uhla β so stranou AC uhol $150°$. Jeden z úsekov, na ktoré delí os uhla β stranu AC, má dĺžku 30 cm. Vypočítajte s presnosťou na dve desatinné miesta dĺžku strany AB, dĺžku strany AC a veľkosť uhla γ. Nájdite všetky možnosti.

9.10 Euklidove vety

1. Vypočítajte obsah pravouhlého trojuholníka, ak päta výšky na preponu delí preponu na úseky dĺžky:

a) 3 cm a 12 cm,
b) 1 dm a 1 dm,
c) 4 m a 3 m.

2. Určte, aké sú dĺžky úsekov, ktoré vytína výška z vrchola C pravouhlého trojuholníka ABC na prepone AB, ak

a) $c = 16$ cm, $v_c = 8$ cm,
b) $c = 50$ cm, $v_c = 15$ cm,
c) $c = 13$ cm, $v_c = 7$ cm,
d) $c = 8$ cm, $v_c = 3$ cm.

3. V pravouhlom trojuholníku ABC je $v = CD$ výška na preponu. Označme $|AD| = c_b$, $|DB| = c_a$. Určte dĺžky strán trojuholníka ABC, ak

a) $c_a = 27$ cm, $c_b = 48$ cm,
b) $c = 12$ cm, $c_a = 3$ cm,
c) $b = 6$ cm, $c_b = 10$ cm,
d) $b = 17$ cm, $v = 15$ cm,
e) $v = 4$ cm, $c_b = 3$ cm,
f) $c_a = 4$ cm, $a = 12$ cm,
g) $a = 2$ cm, $c_b = 3$ cm,
h) $v = 12$ cm, $c = 25$ cm.

4. Daná je úsečka dĺžky 1. Zostrojte úsečku dĺžky $\sqrt{5}$.

5. Daná je úsečka dĺžky 1. Zostrojte úsečku dĺžky $\sqrt{15}$ pomocou

a) Euklidovej vety o výške,
b) Euklidovej vety o odvesne.

6. Dané sú úsečky dĺžok x a y, pričom $x > y$. Pomocou Euklidových viet zostrojte úsečku dĺžky

a) $\sqrt{xy}$,
b) $\dfrac{y^2}{x}$,
c) $\sqrt{xy - y^2}$,
d) $\sqrt{x^2 - xy}$,
e) $y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$,
f) $\sqrt{x^2 - y^2}$,
g) $\dfrac{y}{x}\sqrt{x^2 + xy}$,
h) $\dfrac{y^3}{x^2}$,
i) $\dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 - 4y^2}\right)$.

7. Dané sú úsečky dĺžok x a $\sqrt{x}$, pričom $\sqrt{x} < x$. Pomocou Euklidových viet zostrojte úsečku dĺžky 1.

8. Dané sú úsečky dĺžok x a $\sqrt{x}$, pričom $\sqrt{x} > x$. Pomocou Euklidových viet zostrojte úsečku dĺžky 1.

9. Daná je úsečka XY, o ktorej vieme, že platí $|XY| = \sqrt{7}$. Pomocou Euklidových viet zostrojte úsečku dĺžky 1.

10. Body X a Y ležia na uhlopriečke AC obdĺžnika $ABCD$, pričom platí, že úsečky DX a BY sú kolmé na uhlopriečku AC. Dĺžka úsečky BY je rovnaká ako dĺžka úsečky XY. Aký je pomer dĺžky strany AB k dĺžke strany BC v tomto obdĺžniku?

10 Deliteľnosť

10.1 Násobok prirodzeného čísla

1. Vypočítajte dvojnásobky nasledujúcich čísel:

a) 1,	b) 2,	c) 4,	d) 5,	e) 9,
f) 12,	g) 16,	h) 27,	i) 38,	j) 41,
k) 69,	l) 125,	m) 6 174,	n) 25 257,	o) 148 390.

2. Vypočítajte trojnásobky nasledujúcich čísel:

a) 1,	b) 10,	c) 16,	d) 19,	e) 22,
f) 35,	g) 47,	h) 58,	i) 72,	j) 123,
k) 242,	l) 537,	m) 3 164,	n) 1 342 700,	o) 2 705 162.

3. Vypočítajte štvornásobky nasledujúcich čísel:

a) 3,	b) 4,	c) 7,	d) 9,	e) 13,
f) 18,	g) 27,	h) 51,	i) 65,	j) 120,
k) 443,	l) 787,	m) 4 986,	n) 53 481,	o) 629 274.

4. Vypočítajte päťnásobky nasledujúcich čísel:

a) 2,	b) 7,	c) 13,	d) 16,	e) 25,
f) 31,	g) 42,	h) 67,	i) 79,	j) 174,
k) 248,	l) 444,	m) 5 063,	n) 99 238,	o) 1 273 783.

5. Vypočítajte šesťnásobky nasledujúcich čísel:

a) 5,	b) 8,	c) 12,	d) 16,	e) 25,
f) 33,	g) 41,	h) 59,	i) 74,	j) 90,
k) 187,	l) 742,	m) 1 945,	n) 54 328,	o) 812 037.

6. Vypočítajte sedemnásobky nasledujúcich čísel:

a) 3,	b) 5,	c) 9,	d) 13,	e) 21,
f) 26,	g) 34,	h) 48,	i) 52,	j) 77,
k) 101,	l) 124,	m) 5 229,	n) 23 758,	o) 941 367.

7. Vypočítajte osemnásobky nasledujúcich čísel:

a) 4,	b) 5,	c) 9,	d) 11,	e) 23,
f) 46,	g) 57,	h) 68,	i) 72,	j) 80,
k) 119,	l) 234,	m) 376,	n) 500,	o) 678.

8. Vypočítajte deväťnásobky nasledujúcich čísel:

a) 5,	b) 7,	c) 8,	d) 12,	e) 17,
f) 24,	g) 39,	h) 51,	i) 74,	j) 86,
k) 118,	l) 257,	m) 431,	n) 973,	o) 87 296.

9. Vypočítajte desaťnásobky nasledujúcich čísel:

a) 6,	b) 8,	c) 10,	d) 12,	e) 26,
f) 37,	g) 45,	h) 90,	i) 151,	j) 257,
k) 3 980,	l) 4 200,	m) 10 001,	n) 73 500,	o) 176 874.

10. Vypočítajte stonásobky nasledujúcich čísel:

a) 10,	b) 27,	c) 34,	d) 49,	e) 101,
f) 300,	g) 7 502,	h) 10 070,	i) 98 714,	j) 124 058.

11. Určte, ktoré z nasledujúcich čísel sú násobkami čísla 3:

a) 24,	b) 35,	c) 43,	d) 57,	e) 59,	f) 68,
g) 75,	h) 81,	i) 126,	j) 2 536,	k) 3 147,	l) 4 065.

12. Určte, ktoré z nasledujúcich čísel sú násobkami čísla 4:

a) 32,	b) 36,	c) 54,	d) 58,	e) 64,	f) 72,
g) 82,	h) 970,	i) 1 394,	j) 2 041,	k) 5 976,	l) 8 145.

13. Určte, ktoré z nasledujúcich čísel sú násobkami čísla 6:

a) 16,	b) 28,	c) 32,	d) 36,	e) 48,	f) 52,
g) 64,	h) 78,	i) 82,	j) 913,	k) 2 368,	l) 6 186.

14. Určte, ktoré z nasledujúcich čísel sú násobkami čísla 9:

a) 1,	b) 18,	c) 24,	d) 27,	e) 28,	f) 99,
g) 118,	h) 222,	i) 333,	j) 3 333,	k) 1 324,	l) 10 305.

15. Určte, ktoré z uvedených čísel sú násobkom čísla 3 alebo násobkom čísla 5:

a) 9, b) 14, c) 15, d) 30, e) 69, f) 76,
g) 152, h) 275, i) 693, j) 1 111, k) 3 257, l) 9 185.

16. Určte, pre ktoré z nasledujúcich čísel platí, že číslo 12 je ich násobkom:

a) 1, b) 2, c) 3, d) 4, e) 5, f) 6,
g) 7, h) 8, i) 9, j) 12, k) 18, l) 24.

17. Určte, pre ktoré z nasledujúcich čísel platí, že číslo 168 je ich násobkom:

a) 1, b) 2, c) 3, d) 4, e) 5, f) 6, g) 7,
h) 8, i) 9, j) 10, k) 14, l) 18, m) 21, n) 24,
o) 28, p) 36, q) 42, r) 84, s) 126, t) 168, u) 336.

18. Nájdite všetky trojciferné násobky čísla 15 menšie ako 200.

19. Zistite, či je prvé číslo násobkom druhého čísla:

a) 10, 2, b) 4, 12, c) 15, 6, d) 108, 9, e) 119, 119,
f) 54, 13, g) 0, 8, h) 18, 0, i) 123, 3, j) 96, 8,
k) 175, 25, l) 252, 6, m) 710, 5, n) 3 001, 10 o) 4 182, 12.

20. Rozhodnite, ktoré číslo z dvojice uvedených čísel je väčšie:

a) sedemnásobok čísla 11 a sedemnásobok čísla 12,
b) štvornásobok čísla 6 a dvojnásobok čísla 12,
c) deväťnásobok čísla 29 a dvadsaťdeväťnásobok čísla 9,
d) sedemnásťnásobok čísla 15 a šestnásťnásobok čísla 16,
e) osemnásobok čísla 27 a deväťnásobok čísla 24,
f) jedenásťnásobok čísla 12 a desaťnásobok čísla 13,
g) dvanásťnásobok čísla 15 a deväťnásobok čísla 20.

21. Nájdite najmenší násobok čísla 8, ktorý je:

a) dvojciferný, b) trojciferný, c) štvorciferný, d) päťciferný.

22. Zistite, či sa nasledujúce čísla dajú vyjadriť ako súčin dvoch jednociferných čísel:

a) 7, b) 13, c) 25, d) 26, e) 28, f) 43,
g) 54, h) 57, i) 63, j) 81, k) 99, l) 115.

23. Nájdite všetky prirodzené čísla menšie ako 40, ktoré sú násobkami aspoň štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel.

10.2 Deliteľ prirodzeného čísla

1. Zistite, či je prvé číslo deliteľom druhého čísla:

a) 10, 2, b) 4, 12, c) 3, 7, d) 1, 87, e) 23, 23,
f) 13, 52, g) 0, 8, h) 18, 0, i) 3, 286, j) 9, 3 852,
k) 14, 256, l) 15, 7 315, m) 6, 280, n) 5, 505, o) 4, 2 304.

2. Vydeľte so zvyškom:

a) 24 : 6, b) 15 : 6, c) 18 : 7, d) 10 : 15,
e) 30 : 8, f) 75 : 4, g) 83 : 6, h) 84 : 7,
i) 35 : 14, j) 61 : 18, k) 70 : 15, l) 158 : 21,
m) 218 : 17, n) 427 : 27, o) 4 339 : 42, p) 90 228 : 618.

3. Spomedzi čísel 40 až 60 vypíšte tie, ktoré sú deliteľné:

a) dvomi, b) tromi, c) šiestimi, d) dvomi aj tromi.

4. Spomedzi čísel 20 až 50 vypíšte tie, ktoré sú deliteľné:

a) dvomi, b) tromi, c) štyrmi,
d) šiestimi, e) ôsmimi, f) dvomi aj štyrmi,
g) tromi aj ôsmimi, h) štyrmi aj šiestimi, i) dvadsiatimištyrmi.

5. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú pravdivé a ktoré nepravdivé:

a) Ak je číslo deliteľné šiestimi, tak je delitelné dvomi aj tromi.
b) Ak je číslo deliteľné dvomi aj tromi, tak je delitelné šiestimi.
c) Ak je číslo deliteľné dvadsiatimištyrmi, tak je delitelné tromi aj ôsmimi.
d) Ak je číslo deliteľné tromi aj ôsmimi, tak je delitelné dvadsiatimištyrmi.
e) Ak je číslo deliteľné dvadsiatimištyrmi, tak je delitelné štyrmi aj šiestimi.
f) Ak je číslo deliteľné štyrmi aj šiestimi, tak je delitelné dvadsiatimištyrmi.

6. Nájdite všetky prirodzené delitele nasledujúcich čísel:

a) 8, b) 12, c) 16, d) 21, e) 24, f) 27,
g) 30, h) 53, i) 72, j) 75, k) 100, l) 115.

7. Ktoré číslo spomedzi čísel 1 až 30 má najviac deliteľov?

8. Nájdite všetky čísla spomedzi čísel 1 až 30, ktoré majú presne tri delitele.

10.3 Kritériá deliteľnosti

1. Ktoré z nasledujúcich čísel sú deliteľné dvomi?

a) 1,	b) 2,	c) 7,	d) 8,	e) 32,
f) 69,	g) 436,	h) 9 125,	i) 4 938 150,	j) 8 236 233.

2. Ktoré z nasledujúcich čísel sú deliteľné desiatimi?

a) 3,	b) 10,	c) 15,	d) 240,	e) 303,
f) 10 001,	g) 40 040,	h) 55 005,	i) 6 083 000,	j) 10 831 104.

3. Namiesto $*$ doplňte poslednú cifru tak, aby číslo bolo deliteľné dvomi aj tromi. Nájdite všetky možnosti.

a) 1$*$,	b) 30$*$,	c) 82$*$,	d) 7 34$*$,	e) 642 35$*$,
f) 3 076 12$*$,	g) 5 103 35$*$,	h) 29 075 25$*$,	i) 55 713 02$*$,	j) 61 331 76$*$.

4. Namiesto $*$ doplňte poslednú cifru tak, aby číslo bolo deliteľné tromi, ale nebolo deliteľné dvomi. Nájdite všetky možnosti.

a) 1$*$,	b) 21$*$,	c) 64$*$,	d) 8 15$*$,	e) 234 12$*$,
f) 7 102 24$*$,	g) 8 064 17$*$,	h) 38 136 55$*$,	i) 72 378 02$*$,	j) 89 327 64$*$.

5. Namiesto $*$ doplňte cifru tak, aby výsledné číslo bolo deliteľné štyrmi. Nájdite všetky možnosti.

a) 1$*$,	b) 61$*$,	c) 94$*$,	d) 8 1$*$2,
e) 53$*$ 124,	f) 2 302 26$*$,	g) 7 175 17$*$,	h) 41 196 3$*$6,
i) 52 365 6$*$4,	j) 82 305 7$*$0,	k) 252 413 $*$45,	l) 305 500 9$*$2,
m) 516 004 3$*$8,	n) 803 2$*$3 462,	o) 871 362 73$*$,	p) 999 555 66$*$.

6. Zmeňte v zadanom čísle jednu číslicu tak, aby výsledné číslo bolo deliteľné deviatimi. Nájdite všetky možnosti.

a) 19,	b) 93,	c) 45,	d) 38,	e) 123,
f) 174,	g) 267,	h) 3 063,	i) 2 132 154,	j) 6 203 934.

7. Z cifier 0, 1, 4, 7, 8, z ktorých každú môžete použiť najviac raz, zostavte

a) všetky dvojciferné čísla deliteľné dvomi,

b) všetky trojciferné čísla deliteľné tromi,

c) všetky trojciferné čísla deliteľné desiatimi,

d) všetky trojciferné čísla deliteľné štyrmi,

e) všetky štvorciferné čísla deliteľné tromi a súčasne štyrmi,

f) najväčšie číslo deliteľné deviatimi,

g) najväčšie číslo deliteľné štyrmi a súčasne piatimi,

h) najmenšie číslo deliteľné deviatimi a súčasne desiatimi,

i) najmenšie päťciferné číslo deliteľné ôsmimi.

10.4 Prvočísla a zložené čísla

1. Určte, ktoré z nasledujúcich čísel sú prvočísla a ktoré zložené čísla:

a) 1,	b) 2,	c) 4,	d) 15,	e) 17,	f) 35,
g) 51,	h) 53,	i) 57,	j) 71,	k) 91,	l) 113,
m) 143,	n) 357,	o) 359,	p) 982,	q) 1 001,	r) 9 783.

2. Nasledujúce čísla rozložte na súčin prvočísel.

a) 10,	b) 12,	c) 16,	d) 42,	e) 52,	f) 54,
g) 65,	h) 78,	i) 105,	j) 126,	k) 153,	l) 319,
m) 792,	n) 805,	o) 1 330,	p) 1 525,	q) 2 400,	r) 5 775.

3. Akými číslicami môžu končiť aspoň dvojciferné prvočísla?

4. Prvočísla 11, 13, 17, 19 sa líšia iba v poslednej cifre. Nájdite ďalšiu takú štvoricu väčších prvočísel.

5. Nájdite najmenšie prvočíslo, ktoré obsahuje aspoň dve trojky.

6. Nájdite najmenšie trojciferné prvočíslo, ktoré má rôzne cifry a sú usporiadané od najmenšej po najväčšiu.

7. Ktoré dvojciferné čísla majú najviac prvočíselných deliteľov?

8. Nájdite najmenšie štvorciferné číslo, ktoré má aspoň štyri rôzne prvočíselné delitele.

9. Určte, koľko deliteľov má súčin dvoch rôznych prvočísel.

10. Určte, koľko deliteľov má súčin troch rôznych prvočísel.

11. * Nájdite všetky prirodzené čísla a, b, c, pre ktoré platí $a^2 - (b+c)^2 = 37$.

12. * Nájdite všetky prirodzené čísla a, b, c, pre ktoré platí $a^2 - (b-c)^2 = 173$.

10.5 Najmenší spoločný násobok

1. Nájdite najmenší spoločný násobok nasledujúcich čísel:

a) 1 a 7,	b) 2 a 8,	c) 3 a 5,	d) 10 a 15,
e) 4 a 6,	f) 18 a 24,	g) 21 a 28,	h) 28 a 40,
i) 39 a 52,	j) 28 a 42,	k) 48 a 54,	l) 45 a 60,
m) 72 a 90,	n) 75 a 125,	o) 24 a 42,	p) 84 a 105,
q) 147 a 196,	r) 84 a 90,	s) 126 a 168,	t) 132 a 176,
u) 135 a 300,	v) 76 a 133,	w) 525 a 875,	x) 122 a 146.

2. Nájdite najmenší spoločný násobok trojice čísel:

a) 1, 2, 3,	b) 2, 4, 8,	c) 9, 12, 24,	d) 8, 9, 10,
e) 12, 14, 21,	f) 10, 15, 20,	g) 15, 21, 35,	h) 12, 39, 52,
i) 18, 30, 42,	j) 20, 25, 30,	k) 14, 16, 18,	l) 378, 504, 588.

3. Namiesto $*$ doplňte čo najmenšie prirodzené číslo tak, aby platilo:

a) $\mathrm{nsn}(2,*) = 10$,	b) $\mathrm{nsn}(*,6) = 15$,	c) $\mathrm{nsn}(12,*) = 36$,
d) $\mathrm{nsn}(*,18) = 108$,	e) $\mathrm{nsn}(*,24) = 120$,	f) $\mathrm{nsn}(*,45) = 495$,
g) $\mathrm{nsn}(12,*,18) = 36$,	h) $\mathrm{nsn}(6,10,*) = 60$,	i) $\mathrm{nsn}(140,*) = 1\ 680$.

4. Najmenší spoločný násobok dvoch čísel je 42. Určte druhé číslo, ak viete, že prvé číslo je 7. Nájdite všetky možnosti.

5. Najmenší spoločný násobok dvoch čísel je 42. Určte druhé číslo, ak viete, že prvé číslo je 6. Nájdite všetky možnosti.

6. Najmenší spoločný násobok dvoch neznámych čísel je 24. Určte tieto čísla, ak viete, že ich súčet je 20. Nájdite všetky možnosti.

7. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré dáva zvyšok 2 po delení tromi a zvyšok 3 po delení štyrmi.

8. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré dáva zvyšok 1 po delení dvomi, zvyšok 2 po delení tromi, zvyšok 3 po delení štyrmi, zvyšok 4 po delení piatimi, a zvyšok 5 po delení šiestimi.

9. Najmenší spoločný násobok čísel 8, 12 a z je 72. Nájdite všetky možnosti, čomu sa môže rovnať z.

10. Najmenší spoločný násobok čísel 6, 15 a w je 300. Nájdite všetky možnosti, čomu sa môže rovnať w.

10.6 Najväčší spoločný deliteľ

1. Nájdite najväčšieho spoločného deliteľa čísel:

a) 1 a 9,	b) 2 a 6,	c) 3 a 5,	d) 8 a 12,
e) 12 a 21,	f) 30 a 42,	g) 34 a 85,	h) 48 a 64,
i) 50 a 75,	j) 120 a 252,	k) 124 a 125,	l) 126 a 972,
m) 154 a 330,	n) 156 a 222,	o) 315 a 405,	p) 356 a 420,
q) 360 a 450,	r) 432 a 648,	s) 520 a 720,	t) 525 a 875,
u) 660 a 792,	v) 777 a 800,	w) 945 a 1 575,	x) 1 274 a 2 366.

2. Určte najväčšieho spoločného deliteľa čísel:

a) 8, 16 a 24,	b) 9, 15 a 18,	c) 6, 21 a 28,
d) 7, 35 a 42,	e) 12, 18 a 36,	f) 18, 25 a 32,
g) 17, 27 a 37,	h) 24, 36 a 54,	i) 28, 56 a 72,
j) 48, 126 a 132,	k) 94, 141 a 376,	l) 125, 245 a 360,
m) 150, 270 a 333,	n) 182, 224 a 658,	o) 252, 432 a 972.

3. Najväčší spoločný deliteľ dvoch dvojciferných čísel je 18. Určte druhé číslo, ak viete, že prvé číslo je 36. Nájdite všetky možnosti.

4. Najväčší spoločný deliteľ dvoch trojciferných čísel menších ako 300 je 25. Určte druhé číslo, ak viete, že prvé číslo je 125. Nájdite všetky možnosti.

5. Najväčší spoločný deliteľ čísla 80 a neznámeho čísla je 16. Určte druhé číslo, ak viete, že je menšie ako 200. Nájdite všetky možnosti.

6. Najväčší spoločný deliteľ čísla 90 a neznámeho čísla je 12. Určte druhé číslo, ak viete, že je menšie ako 200. Nájdite všetky možnosti.

7. Nájdite trojicu čísel menších ako 20, ktorých najväčší spoločný deliteľ je 1, ale najväčší spoločný deliteľ ľubovoľných dvoch z nich je väčší ako 1.

8. Rozdeľte nasledujúce prirodzené čísla do dvojíc tak, aby čísla v každej dvojici mali najväčšieho spoločného deliteľa väčšieho ako 1: 38, 52, 63, 65, 81, 115, 123, 125, 352, 385.

9. Najväčší spoločný deliteľ dvoch neznámych čísel je 12. Určte tieto čísla, ak viete, že ich najmenší spoločný násobok je 72. Nájdite všetky možnosti.

10. Najväčší spoločný deliteľ dvoch neznámych čísel je 18. Určte tieto čísla, ak viete, že ich súčin je 1 944. Nájdite všetky možnosti.

11. Najmenší spoločný násobok dvoch prirodzených čísel je 24 a ich najväčší spoločný deliteľ je 2. Určte tieto čísla. Nájdite všetky možnosti.

10.7 Slovné úlohy

1. Máme tyč dlhú 20 metrov a chceme ju narezať na rovnako dlhé kusy, ktorých dĺžka vyjadrená v metroch je celočíselná. Koľko kusov môžeme takto dostať?

2. Máme dve tyče s dĺžkami 2 m a 1,2 m, ktoré chceme narezať na rovnako dlhé kusy, ktorých dĺžka vyjadrená v decimetroch je celočíselná. Aké dĺžky môžu mať narezané kusy tyčí?

3. Obdĺžnikový pozemok s dĺžkou 55 m a šírkou 20 m oplotíme pletivovým plotom. V každom rohu bude jeden stĺpik. Stĺpiky po obvode záhrady chceme mať rovnako vzdialené od seba, pričom táto vzdialenosť nesmie byť väčšia ako 4 metre. Zároveň však chceme použiť čo najmenej stĺpikov. Brána bude upevnená na dvoch susedných stĺpikoch. Určte, aká bude vzdialenosť dvoch susedných stĺpikov a koľko stĺpikov budeme potrebovať.

4. Miestnosť má tvar obdĺžnika s rozmermi 315 cm a 270 cm. Chceme ju bezškárovo vydláždiť čo najväčšími štvorcovými dlaždicami, ktoré nechceme rezať. Akú veľkosť bude mať strana štvorcovej dlaždice, ktorú potrebujeme na vydláždenie tejto miestnosti? Koľko takých dlaždíc budeme potrebovať?

5. Miestnosť má pôdorys tvaru obdĺžnika s rozmermi 312 cm a 240 cm, jej výška je 216 cm, nemá žiadne okno a vstupuje sa do nej otvorom na dvere, ktorý má tvar obdĺžnika s rozmermi 72 cm krát 192 cm. Chceme na steny a strop nalepiť tapety tvaru štvorca bez nutnosti ich strihania. Akú najväčšiu veľkosť môže mať strana štvorcovej tapety, ktorá sa dá použiť na vytapetovanie tejto miestnosti? Koľko kusov takýchto tapiet budeme potrebovať na celú miestnosť?

6. Obdĺžniková miestnosť má pôdorys s rozmermi 200 cm krát 120 cm a výšku 255 cm. Chceme vydláždiť celú podlahu štvorcovými dlaždicami bez škár a bez ich rezania. Zároveň chceme štvorcovými tapetami otapetovať aj dve dlhšie a jednu kratšiu stenu do výšky 180 cm nad úrovňou podlahy po položení dlaždíc. Akú najväčšiu veľkosť môže mať strana štvorcovej dlaždice, ktorá sa dá použiť na vydláždenie podlahy v tejto miestnosti? Akú najväčšiu veľkosť môže mať strana štvorcovej tapety, ktorá sa dá použiť na obklad stien v tejto miestnosti? Koľko kusov takýchto tapiet budeme potrebovať otapetovanie stien v tejto miestnosti?

7. Do pivnice s pôdorysom tvaru obdĺžnika s rozmermi 782 cm krát 327 cm sa vstupuje po rebríku zhora. Najprv chceme obložiť každú stenu rovnakými štvorcovými obkladačkami bez škár do výšky 210 cm od úrovne podkladu bez nutnosti ich rezania. Hrúbka obkladačky vrátane lepidla je 1 cm. Rohy, v ktorých sa stretávajú dve steny, nesmú zostať prázdne – môžu sa zaplniť lepidlom alebo v nich môže byť obkladačka. V druhom kroku chceme vydláždiť podlahu rovnakými štvorcovými dlaždicami bez škár. Rozmery obkladačiek na každej stene a dlaždíc na podlahe sa môžu navzájom líšiť. Určte, akú najväčšiu veľkosť môže mať strana štvorcovej obkladačky, ktorá sa dá použiť na vydláždenie

a) podlahy, b) dlhšej steny, c) kratšej steny.

8. V stavebninách majú dlaždice s rozmermi 25 cm krát 15 cm. Určte, ktoré z nasledujúcich obdĺžnikových miestností nimi vieme vydláždiť bez škár bez toho, aby sme ich museli rezať, pričom všetky dlaždice musia byť natočené rovnakým smerom:

a) 4 m × 3 m, b) 270 cm × 540 cm, c) 345 cm × 550 cm,
d) 435 cm × 750 cm, e) 35 dm × 20 dm, f) 45 dm × 55 dm.

9. Ferdinand chodí do posilňovne každý tretí deň a Boris každý piaty deň. Ferdinand tam bol naposledy tento týždeň v pondelok a Boris tento týždeň v utorok. Ako často tam chodia obaja v ten istý deň? Kedy najbližšie prídu obaja v ten istý deň?

10. Z autobusovej zastávky chodia dve linky autobusov, jedna každých 15 minút a druhá každých 9 minút. Naposledy súčasne odchádzali autobusy oboch liniek o 11:35. Autobusy na týchto dvoch linkách jazdia v čase od 5:00 do 23:00, avšak nevieme, kedy presne ide prvý a kedy posledný spoj. Vieme len to, že ich ide maximálny možný počet.

a) Kedy najbližšie budú opäť odchádzať z tejto zastávky autobusy oboch liniek súčasne?
b) Najviac ako dlho môže Brigita čakať na najbližší odchod nejakého autobusu, ak autobusy chodia presne podľa uvedených pravidiel?
c) Ak nám v čase medzi 12:00 a 15:00 nejaký autobus ušiel rovno pred nosom, aký môže byť najkratší čas do príchodu ďalšieho autobusu?
d) Na svetelnej tabuli na zastávke je v okamihu príchodu Dalibora uvedené, že najbližší autobus pôjde o dve minúty, ďalší autobus po ňom bude zase tá istá linka a až po nich pôjde autobus druhej linky. Ako dlho od príchodu Dalibora na zastávku pôjdu najbližšie zo zastávky autobusy oboch liniek súčasne?
e) Koľkokrát denne odchádzajú zo zastávky autobusy oboch liniek naraz?
f) Kedy odchádza zo zastávky prvý spoj a kedy posledný?

11. Z autobusovej zastávky odchádza jedna linka autobusu každých 15 minút od šiestej rána do desiatej večer. Z tejto zastávky by mala chodiť aj ďalšia autobusová linka aspoň 3-krát za hodinu. Zastávka je malá, zmestí sa tam len jeden autobus. Zistite, v akých pravidelných intervaloch v minútach by mohla odchádzať zo zastávky druhá linka autobusu, aby sa dal spraviť cestovný poriadok tak, aby za celý deň neodchádzali obe linky zo zastávky naraz. Odchod zo zastávky sa udáva v celých minútach. Nájdite všetky možnosti.

12. Félix dostal knihu s hlavolamami sudoku, z ktorej každý deň vyriešil rovnaký počet hlavolamov. Ak by však každý deň vyriešil o tri viac, celú knihu by mal vyriešenú o päť dní skôr. Koľko najmenej hlavolamov mohlo v knihe byť?

13. Jaroslav s Jaromírom si išli spolu zabehať na bežeckom okruhu. Obaja štartovali naraz z toho istého miesta, ale každý bežal svojou rýchlosťou. Jaroslav prebehol jeden okruh za 4 minúty, Jaromír za 140 sekúnd. Bežali až dovtedy, kým sa prvýkrát stretli opäť na mieste štartu. Ako dlho bežali? Koľko okruhov obehol Jaromír a koľko Jaroslav? Koľkokrát obehol Jaromír Jaroslava?

14. Koľko núl bolo použitých pri očíslovaní stránok 1 500-stranovej knihy?

15. Anna, Beáta a Dana si prečítali 120-stranovú knihu. Anna si zakrúžkovala číslo každej štvrtej strany, Beáta si po prečítani každých piatich strán zaštvorčekovala číslo strany a Dana si každú šiestu stranu označila trojuholníkom. Koľko strán v knihe má

a) tri rôzne značky, b) práve dve značky, c) ani jednu značku?

16. Obchod s oblečením bude mať tento rok troch dodávateľov – z Česka, ktorý bude voziť tovar každých 8 dní, z Talianska, ktorý bude voziť tovar každých 12 dní, a z Nemecka, ktorý bude voziť tovar každých 17 dní. Dodávatelia z Česka a z Talianska doviezli tovar prvýkrát v roku 7. januára.

a) Ako často budú voziť tovar dodávatelia z Česka a z Talianska v ten istý deň?
b) Na ktorý deň v týždni od 8. do 14. januára má manažér obchodu dohodnúť dovoz z Nemecka, aby sa ani raz do konca roka nestalo, že by mu doviezli tovar všetci traja dodávatelia v ten istý deň?
c) Koľkokrát v tomto roku dovezú nejakí dvaja dodávatelia tovar v ten istý deň?

17. Učiteľ má v poobedňajšom krúžku 7 žiakov. Na konci školského roka ich chcel odmeniť nejakými sladkosťami. V obchode našiel bonboniéru s 42 bonbónmi. Potom mu ale napadlo, že nejakí žiaci možno budú chýbať. A ak nebude mať v momente, keď vstúpi do triedy, toľko sladkostí, aby sa žiaci mohli spravodlivo rozdeliť, tak sa strašne pohádajú. Koľko takýchto bonboniér potrebuje učiteľ kúpiť?

18. Tehla má tvar kvádra s hranami dĺžok 250 mm, 125 mm a 70 mm. Tehly chceme prevážať v kontajneri tvaru kvádra s vnútornými rozmermi 2,1 m, 200 cm a 150 cm. Koľko tehál sa zmestí do tohto kontajnera?

19. Tehla má tvar kvádra s hranami dĺžok 250 mm, 120 mm a 65 mm. Tehly chceme prevážať v kontajneri tvaru kvádra s vnútornými rozmermi 2 m, 150 cm a 120 cm. Všetky tehly musia byť rovnako nasmerované. Ako treba uložiť tehly do kontajnera, aby sa ich tam zmestilo čo najviac? Koľko tehál sa tam takto zmestí?

Riešenia úloh

8 Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika

8.1 Pravidlo súčtu a súčinu

1. Miroslav má $3 + 5 + 2 = 10$ možností výberu.

2. Máme na výber $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ rôznych obedových menu.

3. a) $5 + 10 + 7 = 22$; b) $10 \cdot (5 + 7) = 120$.

4. a) $2 + 3 \cdot 2 = 8$; b) $(2 + 3 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) = 48$.

5. a) $(10 + 3) \cdot (2 + 5) = 91$; b) $10 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 35$; c) $3 \cdot 5 + 10 \cdot (5 + 2) = 85$.

8.2 Poradia, permutácie a variácie

1. 12, 21; 2 čísla.

2. 123, 132, 213, 231, 312, 321; 6 čísel.

3. 579, 597, 759, 795, 957, 975; 6 čísel.

4. 124, 142, 214, 241, 412, 421; 4 párne.

5. ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

6. 1. Peter, 2. Martin, 3. Juraj; 1. Peter, 2. Juraj, 3. Martin; 1. Martin, 2. Peter, 3. Juraj; 1. Martin, 2. Juraj, 3. Peter; 1. Juraj, 2. Peter, 3. Martin; 1. Juraj, 2. Martin, 3. Peter.

7. ABDO, ABOD, ADBO, ADOB, AOBD, AODB, BADO, BAOD, BDAO, BDOA, BOAD, BODA, DABO, DAOB, DOAB, DOBA, DBAO, DBOA, OABD, OADB, OBAD, OBDA, ODAB, ODBA; DOBA.

8. 1 356, 1 365, 1 536, 1 563, 1 635, 1 653, 3 156, 3 165, 3 516, 3 561, 3 615, 3 651, 5 136, 5 163, 5 316, 5 361, 5 613, 5 631, 6 135, 6 153, 6 315, 6 351, 6 513, 6 531; 24 čísel.

9. Štvorciferných čísel s požadovanou vlastnosťou je $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, pričom 18 z nich je párnych.

10. $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ možností (na výber poslednej cifry máme 2 možnosti (1 alebo 3), na výber zvyšných troch potom $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možností.

11. Mohlo sa to stať v ľubovoľnom mesiaci, pretože rôznych poradí príchodov do práce je 24 a počet pracovných dní v ľubovoľnom mesiaci je maximálne 23.

12. $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ kombinácií.

13. Nie je to možné, pretože všetkých možných poradí obliekania je 24, avšak trenírky si musí obliecť pred nohavicami, takže polovica možností nevyhovuje (buď si obliekol najprv trenírky a potom nohavice alebo naopak). Preto je počet vyhovujúcich poradí obliekania 12. Keďže v každom mesiaci je aspoň 20 pracovných dní a maximálne tri sviatky, potreboval by na jeden mesiac aspoň 17 možných poradí obliekania.

14. 12, 13, 21, 23, 31, 32; 6 čísel.

15. ABE, ABL, AEB, AEL, ALB, ALE, BAE, BAL, BEA, BEL, BLA, BLE, EAB, EAL, ELA, ELB, EBA, EBL, LAB, LAE, LBA, LBE, LEA, LEB; ALE, BAL, BEA; 24 slov.

16. 444, 445, 446, 454, 455, 456, 464, 465, 466, 544, 545, 546, 554, 555, 556, 564, 565, 566, 644, 645, 646, 654, 655, 656, 664, 665, 666; $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ čísel.

17. Existuje $30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\ 360$ možností výsledkov volieb.

18. Existuje $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1\ 320$ možných poradí družstiev na prvých troch miestach.

19. Odohralo sa $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ zápasov.

20. a) $7 \cdot 7 = 49$; b) $10 \cdot 10 = 100$; c) $15 \cdot 15 = 225$; d) $20 \cdot 20 = 400$; e) $25 \cdot 25 = 625$; f) $30 \cdot 30 = 900$.

21. a) $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$; b) $\frac{14 \cdot 13}{2} = 91$; c) $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$; d) $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$; e) $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$; f) $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$.

22. $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 144$ čísel (na mieste tisícok môžu byť len cifry 2, 5, 8, na mieste desiatok a stoviek máme všetky 4 možnosti, na mieste jednotiek môžu byť len cifry 2, 8, 0).

23. $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ čísel (posledná cifra musí byť 8, pretože je jediná párna, prvá cifra potom môže byť len 7 alebo 9, na mieste stoviek máme na výber z troch cifier (okrem tých, ktoré sú na mieste tisícok a jednotiek) a na mieste desiatok máme na výber z dvoch cifier). Najväčšie také číslo je 9 758 (na mieste jednotiek musí byť číslica 8, ostatné cifry zoradíme od najväčšej.

24. $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12$ čísel (posledná cifra musí byť 8, pretože je jediná párna, prvá cifra môže byť len 7 alebo 9, na mieste tisícok máme na výber z troch cifier (okrem tých, ktoré sú na mieste desaťtisícok a jednotiek), na mieste stoviek máme na výber z dvoch cifier a na mieste desiatok musí byť posledná nepoužitá cifra). Najväčšie také číslo je 97 538 (na mieste jednotiek musí byť číslica 8, ostatné cifry zoradíme od najväčšej.

25. $6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 1\ 458$ slov (na prvom mieste môže byť ľubovoľné písmeno (6 možností), na druhom mieste môže byť ľubovoľné druhého druhu (máme 3 možnosti výberu písmena, pretože máme 3 samohlásky aj 3 spoluhlásky), na treťom mieste opäť tri možnosti výberu písmena rovnakého druhu ako na prvom mieste atď.).

26. $6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 72$ slov (na prvom mieste môže byť ľubovoľné písmeno (6 možností), na druhom mieste môže byť ľubovoľné písmeno druhého druhu (máme 3 možnosti výberu písmena, pretože máme 3 samohlásky aj 3 spoluhlásky), na treťom mieste sú už len 2 možnosti výberu písmena rovnakého druhu ako na prvom mieste, pretože jedno už bolo použité na prvom mieste, atď.).

27. $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 144$ slov (na prvom mieste musí byť spoluhláska (4 možností), na druhom mieste máme na výber 3 možnosti na výber samohlásky, na treťom mieste sú už len 3 možnosti výberu spoluhlásky, pretože jedna už bola použitá na prvom mieste, atď.).

28. $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ čísel (na prvom mieste musí byť číslica 1, na ďalších štyroch miestach máme na výber z dvoch možností 0 a 1).

29. $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$ čísel (na prvom mieste môže byť číslica 1 alebo 2, na ďalších štyroch miestach máme na výber z troch možností 0, 1 a 2).

30. Existuje $6 \cdot 6 = 36$ možných výsledkov hodu. Súčty hodených čísel nadobúdajú hodnotu od 2 do 12. Najčastejšie sa vyskytuje súčet 7, pretože môže padnúť až šiestimi rôznymi spôsobmi ($1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+6$, $6+1$).

8.3 Kombinácie

1. 6 spôsobov: malinová a citrónová, malinová a mangová, malinová a čučoriedková, citrónová a mangová, citrónová a čučoriedková, mangová a čučoriedková.

2. Na výber má 10 spôsobov: (pondelok, utorok, streda), (pondelok, utorok, štvrtok), (pondelok, utorok, piatok), (pondelok, streda, štvrtok), (pondelok, streda, piatok), (pondelok, štvrtok, piatok), (utorok, streda, štvrtok), (utorok, streda, piatok), (utorok, štvrtok, piatok), (streda, štvrtok, piatok).

3. Na výber máme 10 spôsobov; (lyžica, lyžica, lyžica), (lyžica, lyžica, vidlička), (lyžica, lyžica, nôž), (lyžica, vidlička, vidlička), (lyžica, vidlička, nôž), (lyžica, nôž, nôž), (vidlička, vidlička, vidlička), (vidlička, vidlička, nôž), (vidlička, nôž, nôž), (nôž, nôž, nôž).

4. $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

5. $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$.

6. a) $\binom{7}{3} = 35$; b) $\binom{7+3-1}{3} = \binom{9}{3} = 84$.

7. V obchode mali 16 druhov nanukov.

8. V obchode mali 21 druhov nanukov.

9. a) $\binom{12}{4} = 495$; b) $\binom{9}{4} = 126$.

10. $\binom{11}{4} = 330$.

11. $\binom{8}{4} = 70$.

12. a) $\binom{28}{6}$; b) $\binom{26}{6} + 2 \cdot \binom{27}{5} = \binom{28}{6} - \binom{26}{4}$; c) $\binom{11}{2} \cdot \binom{17}{4}$; d) $\binom{28}{6} - \binom{17}{6}$.

13. a) $\binom{18}{8} = \binom{18}{10}$; b) $\binom{7}{3} \cdot \binom{11}{5}$; c) $\binom{18}{8} - \binom{9}{2} \cdot \binom{9}{6} - \binom{10}{6} \cdot \binom{8}{2}$; d) $\binom{18}{8} - \binom{6}{2} \cdot \binom{12}{6} - \binom{13}{6} \cdot \binom{5}{2} + \binom{6}{2} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{5}{2}$.

8.4 Kombinačné čísla a binomická veta

1. a) $\binom{10}{2}$; b) $\binom{25}{5}$; c) $\binom{12}{6}$.

2. a) 21; b) 20; c) 1; d) 9; e) 0; f) 126 g) 13; h) 210; i) 252; j) 56; k) 792; l) 78.

3. a) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; b) $16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$; c) $\frac{1}{81} + \frac{4a}{9} + 6a^2 + 36a^3 + 81a^4$; d) $\sqrt{x^5} - 5x^2 + 10\sqrt{x^3} - 10x + 5\sqrt{x} - 1$; e) $x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$; f) $\frac{1}{16} + \frac{n^2}{2} + \frac{3n^4}{2} + 2n^6 + n^8$; g) $\sqrt{x^3} - 9\sqrt{x} + \frac{27}{\sqrt{x}} - \frac{27}{\sqrt{x^3}}$; h) $\frac{k^5}{32} + \frac{5k^4l}{8} + 5k^3l^2 + 20k^2l^3 + 40kl^4 + 32l^5$.

4. a) 35; b) 40; c) 0, lebo taký člen sa tam nenachádza; d) $\frac{21}{16}$; e) 9; f) 264.

5. a) $2^7 = 128$; b) -2; c) 24; d) 0, lebo taký člen sa tam nenachádza; e) $\frac{15}{16}$; f) $\frac{21}{2}$.

6. 0.

7. a) $\binom{9}{4} = \binom{9}{5}$; b) $\binom{12}{7} = \binom{12}{5}$; c) $\binom{14}{9} = \binom{14}{5}$; d) $\binom{17}{5} = \binom{17}{12}$; e) $\binom{20}{8} = \binom{20}{12}$; f) $\binom{17}{5} = \binom{17}{12}$.

8.5 Rôzne kombinatorické úlohy

1. $\frac{1}{2}n(n-3)$.

2. 7-uholník.

3. Pre $n=3$ je ich 0, pre $n \geq 4$ je ich $\binom{n}{3} - n(n-4) - n$.

4. Môže si to naplánovať 26 880 spôsobmi.

5. a) $\frac{6!}{3!} = 120$; b) $\binom{6\cdot 5}{3} = \binom{30}{3} = 4\,060$; c) $\binom{6\cdot 5 - 2\cdot 3}{3} = \binom{24}{3} = 2\,024$; d) $\binom{6\cdot 5+3-1}{3} =$ $= \binom{32}{3} = 4\,960$.

8.6 Pravdepodobnosť a štatistika

1. a) možná; b) možná; c) nemožná; d) možná; e) nemožná; f) nemožná.

2. a) mohla nastať (nastala napríklad v prípade hodenia dvoch štvoriek, pretože $4+4=8$, nenastala napríklad v prípade hodenia jednotky a dvojky, pretože $1+2=3\neq 8$); b) nastala; c) mohla nastať (nastala napríklad, ak padli čísla 1, 3, 3 (ich súčin je 9), nenastala napríklad, ak padli čísla 2, 2, 2 (ich súčin je 8)); d) mohla nastať (nastala napríklad v prípade, že padli čísla 1, 2, 3, 4, 5, nenastala napríklad v prípade, že padli čísla 2, 3, 4, 5, 6 (nepadla 1 a padla 6)); e) mohla nastať (nastala napríklad v prípade, že prišlo 25 žiakov, nenastala napríklad v prípade, že prišlo 30 žiakov); f) nemohla nastať; g) nastala; h) mohla nastať (nastala napríklad v prípade, že padlo číslo 7, nenastala napríklad v prípade, že padlo číslo 8); i) mohla nastať (nastala napríklad v prípade, že padli čísla 1, 2, 4, 8, 16, nenastala napríklad v prípade, že padli čísla 1, 2, 3, 4, 5).

3. a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{6}$; c) 0; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{3}$; h) 1.

4. a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{7}{15}$; c) $\frac{8}{15}$; d) $\frac{1}{5}$; e) $\frac{1}{5}$; f) $\frac{2}{15}$; g) $\frac{7}{15}$; h) $\frac{2}{15}$; i) $\frac{14}{15}$; j) $\frac{2}{15}$.

5. a) 9; b) 2; c) 0; d) 4; e) 1; f) 0; g) 8; h) 2; i) 18; j) 4; k) 22; l) 2.

6. a) 3; b) 10; c) 14; d) 8; e) 19; f) 7,5; g) 12,5; h) 146,5; i) 390; j) 13,85; k) 10,35; l) 2,75; m) 72; n) 12,98; o) 161,689 5; p) 3,166; q) 16,205 5; r) 391,232 5.

7. a) 0; b) $-4{,}5$; c) 1; d) 1,865; e) $-3{,}105$; f) $-6{,}73$; g) 0,017; h) $-8{,}855$; i) 1,775; j) $\frac{25}{16} = 1{,}562\,5$; k) 7; l) $\frac{205}{36} = 5{,}69\overline{4}$; m) $\frac{157}{85} \doteq 1{,}85$; n) $-\frac{67}{144} = -0{,}465\,2\overline{7}$; o) 5,33; p) $-\frac{4\,859}{1\,550} \doteq -3{,}13$; q) 1,75; r) 1,4.

8. a) 8; b) 19; c) 14,25; d) 11,4; e) 27,25; f) 0,175; g) 0; h) 0,5; i) $\frac{5\,653}{2\,520} \doteq 2{,}24$; j) $-\frac{91}{48} = -1{,}895\,8\overline{3}$; k) $-\frac{91}{72} = -1{,}263\,\overline{8}$; l) $\frac{1\,618}{875} \doteq 1{,}85$; m) $\frac{392\,327}{26\,775} \doteq 14{,}65$; n) $\frac{408\,917}{36\,000} \doteq 11{,}36$; o) $\frac{20\,267}{4\,200} \doteq 4{,}83$; p) $-\frac{8\,573}{3\,780} \doteq -2{,}27$.

9. Albert vykopal priemerne 150 metrov za deň.

10. Priemerné vreckové je 20 €. Nadpriemerné vreckové dostáva jedno dieťa (Otília).

11. Nie, pretože priemerné vreckové v triede sa musí nachádzať medzi najmenšou a najväčšou hodnotou vreckového, teda medzi hodnotami 10 eur a 15 eur mesačne (v tomto prípade to je presne 11,25 € eur mesačne).

12. Priemerná hmotnosť jedného pomaranča je 162,5 g.

13. Nadpriemernú výšku majú traja žiaci. Priemerná výška všetkých žiakov s presnosťou na centimetre je 156 cm. Priemerná výška žiakov s presnosťou na milimetre je 1 559 mm. Určovať výšku osôb s presnosťou na milimetre nemá význam, pretože výšku môže ovplyvniť napríklad spôsob držania tela a pootočenie hlavy (dokážu zmeniť výšku o niekoľko milimetrov), hrúbka ponožiek, účes a podobne.

14. Priemerná známka z matematiky s presnosťou na jedno desatinné miesto bola 1,5.

15. Počas týždňa chýbalo priemerne 6 žiakov.

16. Priemerný vek žiakov v triede je 14,5 roka – zostal zachovaný, pretože odišli žiaci, ktorých priemerný vek bol tiež 14,5 roka.

17. V triede je 29 žiakov.

9 Trojuholník

9.1 Trojuholníková nerovnosť

1. a) áno; b) nie, lebo $a + b = c$; c) nie, lebo $b + c < a$; d) áno; e) nie, lebo $a = b + c$; f) áno.

2. a) áno; b) áno; c) áno; d) nie, lebo $a + c < b$; e) áno; f) nie, lebo $a + c < b$.

3. a) 5 cm, 6 cm, 7 cm, ..., 19 cm; b) 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm; c) 1 cm; d) 1 cm, 2 cm, ..., 9 cm; e) 11 cm, 12 cm, ..., 27 cm; f) 3 cm, 4 cm, ..., 9 cm.

4. a) áno; b) nie; c) áno; d) áno; e) nie; f) áno.

5. Dĺžka základe je menšia ako dvojnásobok dĺžky ramena.

9.2 Obvod trojuholníka

1. a) 45 cm; b) 300 cm; c) 27 cm; d) 29 dm; e) 3,642 m; f) 9 m.

2. a) $a = 7$ m; b) $a = 11$ dm; c) taký trojuholník neexistuje, pretože neplatí trojuholníková nerovnosť (ak by taký trojuholník existoval, muselo by platiť $a = 3$ cm, avšak vtedy neplatí trojuholníková nerovnosť $a + c > b$, pretože 3 cm + 5 cm = 8 cm < 12 cm); d) $a = 350$ cm; e) taký trojuholník neexistuje, pretože neplatí trojuholníková nerovnosť (ak by taký trojuholník existoval, muselo by platiť $a = 28$ cm, avšak vtedy neplatí trojuholníková nerovnosť $a + c > b$, pretože 28 cm + 2 cm = 30 cm; f) taký trojuholník neexistuje, pretože obvod trojuholníka musí byť vždy väčší ako dĺžka ľubovoľnej z jeho strán.

3. Na oplotenie pozemku budeme potrebovať 350 m pletiva.

4. Zuzana bude potrebovať dve fixky.

5. a) 48 cm; b) 26 m; c) taký trojuholník neexistuje, pretože nespĺňa trojuholníkovú nerovnosť; d) 15 cm; e) 820 cm; f) 283,4 m.

6. Základňa má dĺžku 4 cm a ramená majú dĺžku 8 cm.

7. a) 24 cm; b) 30 dm; c) 6 m; d) 18 mm.

8. a) 10 dm; b) 5,5 cm; c) 7 m; d) 33 cm.

9.3 Uhly trojuholníka

1. a) 180°; b) 180°; c) 180°; d) 180°; e) 180°; f) 180°.

2. a) áno; b) nie; c) nie; d) nie; e) nie; f) áno.

3. a) $\gamma = 60°$; b) $\gamma = 80°$; c) $\alpha = 150°$; d) $\beta = 60°$; e) $\beta = 90°$; f) $\alpha = 90°$.

4. a) $\beta = 40°$, $\gamma = 40°$; b) $\alpha = 20°$, $\gamma = 80°$ alebo $\alpha = 80°$, $\gamma = 20°$ alebo $\alpha = 50°$, $\gamma = 50°$; c) $\alpha = 45°$, $\gamma = 45°$; d) $\alpha = 10°$, $\beta = 10°$; e) $\beta = 75°$, $\gamma = 75°$ alebo $\beta = 30°$, $\gamma = 120°$ alebo $\beta = 120°$, $\gamma = 30°$; f) $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$.

5. a) 50°; b) 35°; c) 55°; d) 80°; e) 86°; f) 5°.

6. a) áno, pravouhlý; b) áno, ostrouhlý; c) áno, ostrouhlý; d) áno, tupouhlý; e) nie; f) nie.

7. a) pravouhlý; b) tupouhlý; c) pravouhlý; d) tupouhlý; e) ostrouhlý; f) pravouhlý.

8. a) 80°; b) 15°; c) 75°; d) 45°; e) 60°; f) 67,5°.

9. a) 146°; b) 80°; c) 20°; d) taký trojuholník neexistuje; e) taký trojuholník neexistuje; f) 120°.

10. Ide o pravouhlý trojuholník.

11. a) tri ostré; b) jeden pravý a dva ostré; c) jeden tupý a dva ostré.

12. a) $\alpha' = 150°$, $\beta' = 98°$, $\gamma' = 112°$; b) $\alpha' = 120°$, $\beta' = 120°$, $\gamma' = 120°$; c) $\alpha' = 145°$, $\beta' = 115°$, $\gamma' = 100°$; d) $\alpha' = 120°$, $\beta' = 80°$, $\gamma' = 160°$; e) $\alpha' = 132°$, $\beta' = 133°$, $\gamma' = 95°$; f) $\alpha' = 151°$, $\beta' = 121°$, $\gamma' = 88°$.

13. a) $\beta = 47°$, $\gamma = 67°$, $\alpha' = 114°$, $\gamma' = 113°$; b) $\alpha = 120°$, $\beta = 30°$, $\beta' = 150°$, $\gamma' = 150°$; c) $\alpha = 45°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 15°$, $\beta' = 60°$; d) $\alpha = 23°$, $\gamma = 60°$, $\alpha' = 157°$, $\beta' = 83°$; e) $\alpha = 46°$, $\beta = 62°$, $\alpha' = 134°$, $\gamma' = 108°$; f) $\beta = 21°$, $\gamma = 52°$, $\alpha' = 73°$, $\gamma' = 128°$;

14. Ide o rovnostranný trojuholník.

15. Ide o ostrouhlý trojuholník.

16. Ide o pravouhlý trojuholník.

17. Najmenší uhol je $\sphericalangle ACB$ a najväčšie uhly sú $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle BAC$.

18. Maximálne jeden.

9.4 Obsah pravouhlého trojuholníka

1. a) 6 mm^2; b) 30 cm^2; c) 60 dm^2; d) 84 m^2.

2. a) 40 cm^2; b) 420 cm^2; c) 60 mm^2; d) 40 cm^2.

3. a) $a = 20$ cm; b) $a = 1\,320$ dm; c) $b = 20$ cm; d) $a = 0{,}8$ mm; e) $a = 200$ mm; f) $b = 28$ cm.

4. Obvod trojuholníka je 12 cm.

5. Trojuholník môže mať nasledujúce dĺžky odvesien: 1 cm a 20 cm, 2 cm a 10 cm, 4 cm a 5 cm.

6. Existujú štyri trojuholníky s požadovanou vlastnosťou (ich odvesny môžu mať dĺžky 1 cm a 30 cm, alebo 2 cm a 15 cm, alebo 3 cm a 10 cm, alebo 5 cm a 6 cm).

9.5 Zhodnosť trojuholníkov

1. Áno.

2. Áno.

3. $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$, $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle EFD|$, $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle FDE|$, $|AB| = |DE|$, $|BC| = |EF|$, $|CA| = |FD|$.

4. $|\sphericalangle KTO| = |\sphericalangle SPI| = 70°$, $|\sphericalangle KOT| = |\sphericalangle SIP| = 63°$, $|\sphericalangle TKO| = |\sphericalangle PSI| = 47°$, $|KT| = 4$ cm.

5. $\triangle ABC \cong \triangle IGH \cong \triangle QRP$; $\triangle DEF \cong \triangle UST$.

6. $\triangle XYZ \cong \triangle LJK \cong \triangle OMN$.

7. $\triangle ABC \cong \triangle EFD \cong \triangle LJK$.

8. $\triangle ABC \cong \triangle PRQ$, $\triangle DEF \cong \triangle JLK$, $\triangle GHI \cong \triangle MON$.

9.6 Podobnosť trojuholníkov

1. $|\sphericalangle GHI| = |\sphericalangle JKL|$, $|\sphericalangle HIG| = |\sphericalangle KLJ|$, $|\sphericalangle IGH| = |\sphericalangle LJK|$, $|GH| : |JK| = |HI| : |KL| = |IG| : |LJ|$.

2. $|\sphericalangle DEF| = 60°$, $|\sphericalangle BCA| = 73°$, $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle FDE| = 47°$, $|DE| = 8$ cm.

3. $\triangle ABC \sim \triangle IGH \sim \triangle PQR$; $\triangle DEF \sim \triangle UST$.

4. $\triangle ABC \sim \triangle DEF \sim \triangle EDF \sim \triangle JLK \sim \triangle LJK \sim \triangle OMN \sim \triangle MON$.

5. $\triangle ABC \sim \triangle EFD \sim \triangle HIG \sim \triangle LJK \sim \triangle MNO \sim \triangle PQR$.

6. $\triangle ABC \sim \triangle PRQ$, $k = \frac{2}{3}$; $\triangle DEF \sim \triangle JLK$, $k = \frac{5}{8}$; $\triangle GHI \sim \triangle MON$, $k = \frac{13}{11}$.

7. $\triangle ABC \sim \triangle KJL \sim \triangle ZYX$; $\triangle DEF \sim \triangle STU \sim \triangle SUT \sim \triangle TSU \sim \triangle TUS \sim \triangle UST \sim \triangle UTS$; $\triangle GHI \cong \triangle NMO$.

8. a) $\triangle ABC \sim \triangle EDF$, $k = \frac{4}{5}$; b) $\triangle DEF \sim \triangle ZXY$, $k = \frac{4}{7}$; c) $\triangle GHI \sim \triangle LEP$, $k = \frac{5}{4}$; d) $\triangle JKL \sim \triangle END$, $k = 25$; e) trojuholníky nie sú podobné; f) $\triangle PQR \sim \triangle UDB$, $k = \frac{3}{2}$; g) trojuholníky nie sú podobné.

9. a) $\triangle A'B'C'$, $a' = 6$ cm, $b' = 8$ cm, $c' = 10$ cm; b) $\triangle D'E'F'$, $d' = 13{,}2$ cm, $e' = 7{,}2$ cm, $f' = 8{,}4$ cm; c) $\triangle G'H'I'$, $g' = 2$ cm, $h' = 4$ cm, $i' = 4{,}5$ cm; d) $\triangle J'K'L'$, $j' = 2$ cm, $k' = 3$ cm, $l' = 4$ cm; e) $\triangle M'N'O'$, $m' = 6$ cm, $n' = 4$ cm, $o' = 5$ cm; f) taký trojuholník neexistuje.

10. Magdaléna má výšku 1,35 metra a Tadeáš 178 centimetrov.

11. Áno, môžu, pretože trojuholník ABC môže mať vnútorné uhly 80°, 80° a 40°, ale nemusia, pretože trojuholník ABC môže mať aj vnútorné uhly 80°, 50° a 50°.

12. Nie, pretože trojuholník ABC musí mať vnútorné uhly 90°, 45° a 45°.

13. Nevieme. Vieme, že trojuholník ABC musí mať vnútorné uhly 100°, 40° a 40°. Trojuholník XYZ môže mať vnútorné uhly 100°, 40° a 40°, avšak môže mať aj vnútorné uhly 70°, 70° a 40°. Tieto dva trojuholníky si nie sú podobné, pretože majú rozdielne vnútorné uhly. Preto nevieme s istotou povedať, či sú trojuholníky ABC a XYZ podobné.

14. 204 cm.

15. 192 cm^2.

16. Dĺžky strán trojuholníka ABC sú 4,5 cm, 6 cm a 7,5 cm. Tento trojuholník je pravouhlý.

17. Dĺžky strán trojuholníka HEJ sú 9 cm, 9 cm a 3 cm. Tento trojuholník je rovnoramenný.

18. Dĺžky strán trojuholníka DEF sú 14 cm, 18 cm a 20 cm.

19. Výška komína je približne 35 metrov.

9.7 Pytagorova veta

1. a) odvesny: a, c, prepona: b; b) odvesny: a, b, prepona: c; c) odvesny: a, b, prepona: c; d) odvesny: a, c, prepona: b; e) odvesny: a, b, prepona: c; f) odvesny: b, c, prepona: a.

2. a) $\sphericalangle BAC$; b) $\sphericalangle DEF$; c) $\sphericalangle GHI$; d) $\sphericalangle JLK$; e) $\sphericalangle OMN$; f) $\sphericalangle PRQ$.

3. a) $|BC|^2 + |AB|^2 = |AC|^2$, $a^2 + c^2 = b^2$, $(12\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2 = (13\text{ cm})^2$; b) $|EF|^2 + |DF|^2 = |DE|^2$, $d^2 + e^2 = f^2$, $(39\text{ cm})^2 + (80\text{ cm})^2 = (89\text{ cm})^2$; c) $|HI|^2 + |GH|^2 = |GI|^2$, $g^2 + i^2 = h^2$, $(77\text{ cm})^2 + (36\text{ cm})^2 = (85\text{ cm})^2$; d) $|KL|^2 + |JK|^2 = |JL|^2$, $j^2 + l^2 = k^2$, $(30\text{ cm})^2 + (40\text{ cm})^2 = (5\text{ dm})^2$; e) $|ON|^2 + |MO|^2 = |MN|^2$, $m^2 + n^2 = o^2$, $(51\text{ cm})^2 + (14\text{ dm})^2 = (149\text{ cm})^2$; f) $|QR|^2 + |PQ|^2 = |PR|^2$, $p^2 + r^2 = q^2$, $(45\text{ m})^2 + (280\text{ dm})^2 = (530\text{ dm})^2$.

4. a) áno; b) nie; c) áno; d) áno; e) áno; f) nie; g) áno; h) áno; i) nie; j) nie.

5. a) $c = 13$ cm; b) $f = 29$ m; c) $h = 5$ m; d) $j = 15$ dm; e) $o = 51$ cm; f) $p = 85$ dm; g) $t = 241$ dm; h) $z = 15\sqrt{2}\text{ m} \doteq 21{,}21$ m; i) $r = 10\sqrt{5}\text{ cm} \doteq 22{,}36$ cm; j) $a = 2\sqrt{10\,001}\text{ cm} \doteq 200{,}01$ cm.

6. a) $c = 30$ cm; b) $f = 11$ m; c) $i = 20$ dm; d) $j = 16$ dm; e) $o = 80$ cm; f) $p = 80$ dm; g) $u = 133$ m; h) $z = \sqrt{125}$ m $\doteq 11{,}18$ m; i) $b = \sqrt{87}$ cm $\doteq$ $\doteq 9{,}33$ cm; j) $b = \sqrt{15\,561}$ cm $\doteq 124{,}74$ cm.

7. a) $b = 48$ cm; b) $f = 17$ cm; c) $i = 220$ dm; d) $k = 149$ cm; e) $m = \sqrt{85}$ mm $\doteq$ $\doteq 9{,}22$ mm; f) $q = 13$ dm; g) $u = 5\sqrt{34}$ m $\doteq 29{,}15$ m alebo $u = 20$ m; h) $z = \sqrt{202}$ m $\doteq 14{,}21$ m alebo $z = 2\sqrt{10}$ m $\doteq 6{,}32$ m; i) $k = 8\sqrt{2}$ cm $\doteq$ $\doteq 11{,}31$ cm; j) $e = \sqrt{3}$ dm $\doteq 1{,}73$ dm.

8. Strany trojuholníka majú dĺžky 5 cm, 12 cm, 13 cm.

9. Strany trojuholníka majú dĺžky 6 dm, 8 dm, 10 dm.

10. Strany trojuholníka majú dĺžky 10 cm, 12 cm, $2\sqrt{61}$ cm $\doteq 15{,}62$ cm.

11. Obvod trojuholníka je $40 \cdot (1 + \sqrt{61})$ cm $\doteq 96{,}57$ cm.

12. Výška na preponu má dĺžku $\frac{120}{17}$ cm $\doteq 7{,}06$ cm.

13. Ťažnica má dĺžku 12,5 cm.

14. Obvod trojuholníka je 120 cm, obsah trojuholníka je 540 cm^2.

15. Ramená majú dĺžku 5 cm, obvod trojuholníka je 16 cm.

16. Obsah trojuholníka je $\frac{49}{4}\sqrt{3}$ $\text{dm}^2 \doteq 21{,}22$ dm^2.

17. Obsah trojuholníka je $9\sqrt{3}$ $\text{cm}^2 \doteq 15{,}6$ cm^2.

18. Dĺžka uhlopriečky štvorca je $17\sqrt{2}$ $\text{cm}^2 \doteq 24{,}04$ cm^2.

19. Dĺžka uhlopriečky obdĺžnika je 41 cm.

20. Obvod obdĺžnika je 46 cm, obsah obdĺžnika je 120 cm^2.

21. Dĺžka všetkých telesových uhlopriečok kvádra je 101 cm.

22. Obvod kosoštvorca je 68 cm, obsah kosoštvorca je 240 cm^2.

23. Ramená majú dĺžky 35 cm a 37 cm.

24. Obvod lichobežníka je 250 cm, obsah lichobežníka je 3 240 cm^2.

25. Napríklad: zostrojíme pravouhlý trojuholník s odvesnami s dĺžkami 1 a 2 a jeho prepona bude mať požadovanú dĺžku.

26. Napríklad: zostrojíme pravouhlý trojuholník s odvesnami s dĺžkami 1 a $\sqrt{5}$ a jeho prepona bude mať požadovanú dĺžku.

27. Napríklad: zostrojíme pravouhlý trojuholník s odvesnami s dĺžkami $\sqrt{5}$ a $\sqrt{6}$ a jeho prepona bude mať požadovanú dĺžku.

28. Napríklad: zostrojíme pravouhlý trojuholník s odvesnami s dĺžkami $\sqrt{8}$ a $\sqrt{8}$. Jeho prepona bude mať dĺžku 8 a túto dĺžku potom rozdelíme na 8 rovnakých častí (napríklad trikrát opakovaným delením úsečky na jednu polovicu – postupne dostaneme úsečky s dĺžkami 4, 2 a 1).

29. Existujú štyri také obdĺžniky – ich dĺžky strán sú nasledujúce: 39 cm a 52 cm, 25 cm a 60 cm, 16 cm a 63 cm, 33 cm a 56 cm.

30. a) ostrouhlý; b) ostrouhlý; c) tupouhlý, $\sphericalangle HIG$; d) ostrouhlý; e) tupouhlý, $\sphericalangle MNO$; f) tupouhlý, $\sphericalangle PRQ$; g) ostrouhlý; h) tupouhlý, $\sphericalangle ZYX$; i) pravouhlý, $\sphericalangle TRN$; j) tupouhlý, $\sphericalangle KRT$; k) tupouhlý, $\sphericalangle HAM$; l) ostrouhlý.

9.8 Kosínusová veta

1. a) 10 cm; b) 7 cm; c) 6,51 cm; d) 7,80 cm; e) 7,94 cm; f) 17,89 cm; g) 16,44 cm; h) 4,44 cm; i) 8,02 cm; j) 12,12 cm; k) 13 cm; l) 6,13 cm.

2. a) 8,66 cm; b) 3 cm; c) 12 cm; d) 5,49 cm alebo 11,49 cm; e) taký trojuholník neexistuje; f) 14,56 cm; g) taký trojuholník neexistuje; h) 3,53 cm; i) 6,35 cm alebo 8,16 cm; j) 3,76 cm alebo 13,56 cm; k) 3 cm alebo 5 cm; l) 1,05 cm alebo 6,68 cm.

3. a) $\alpha \doteq 36{,}87°$, $\beta \doteq 53{,}13°$, $\gamma = 90°$; b) $\alpha \doteq 56{,}39°$, $\beta \doteq 7{,}36°$, $\gamma \doteq 116{,}25°$; c) $\alpha \doteq 51{,}32°$, $\beta \doteq 77{,}36°$, $\gamma \doteq 51{,}32°$; d) taký trojuholník neexistuje; e) $\alpha \doteq 92{,}2°$, $\beta \doteq 60°$, $\gamma \doteq 27{,}8°$; f) $\alpha \doteq 44{,}42°$, $\beta \doteq 78{,}46°$, $\gamma \doteq 57{,}12°$; g) $\alpha \doteq 40{,}32°$, $\beta \doteq 89{,}8°$, $\gamma \doteq 49{,}88°$; h) $\alpha \doteq 137{,}01°$, $\beta \doteq 26°$, $\gamma \doteq 16{,}99°$; i) $\alpha = 90°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 60°$; j) $\alpha = 45°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 45°$; k) $\alpha \doteq 72{,}58°$, $\beta \doteq 50{,}82°$, $\gamma \doteq 56{,}6°$; l) $\alpha \doteq 133{,}42°$, $\beta \doteq 17{,}61°$, $\gamma \doteq 28{,}96°$.

4. a) $c \doteq 15{,}52$ m, $\alpha \doteq 63{,}2°$, $\beta \doteq 56{,}8°$, $\gamma \doteq 60°$; b) $c = 25$ m, $\alpha \doteq 32{,}52°$, $\beta \doteq 73{,}74°$, $\gamma \doteq 73{,}74°$; c) $c \doteq 8{,}66$ cm, $\alpha = 90°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 60°$; d) $c \doteq 10{,}51$ cm, $\alpha \doteq 27{,}27°$, $\beta \doteq 47{,}14°$, $\gamma \doteq 105{,}59°$; e) taký trojuholník neexistuje; f) $c \doteq 4{,}06$ cm, $\alpha \doteq 106{,}08°$, $\beta \doteq 22{,}6°$, $\gamma \doteq 51{,}32°$.

5. a) $a \doteq 15{,}59$ cm, $b = 18$ cm, $\beta = 90°$, $\gamma = 30°$; b) $a \doteq 10{,}44$ cm, $b \doteq 13{,}78$ cm, $\beta \doteq 111{,}01°$, $\gamma \doteq 23{,}99°$ alebo $a \doteq 4{,}37$ cm, $b \doteq 3{,}19$ cm, $\beta \doteq 31{,}11°$, $\gamma \doteq 103{,}89°$; c) taký trojuholník neexistuje; d) $a = 14$ cm, $b \doteq 24{,}25$ cm, $\beta = 120°$, $\gamma = 30°$; e) $a \doteq 15{,}82$ cm, $b \doteq 20{,}46$ cm, $\beta \doteq 97{,}82°$, $\gamma \doteq 32{,}18°$ alebo $a \doteq 8{,}46$ cm, $b \doteq 7{,}82$ cm, $\beta \doteq 45{,}07°$, $\gamma \doteq 84{,}93°$; f) $a \doteq 15{,}02$ mm, $b \doteq 12{,}61$ cm, $\beta \doteq 46{,}66°$, $\gamma \doteq 13{,}34°$.

6. a) $a \doteq 15{,}97$ cm, $b \doteq 2{,}23$ cm, $\beta \doteq 4°$, $\gamma \doteq 26°$; b) taký trojuholník neexistuje; c) $a \doteq 4{,}07$ cm, $b \doteq 5{,}1$ cm, $\beta \doteq 45{,}98°$, $\gamma \doteq 99{,}02°$ alebo $a \doteq 6{,}49$ cm, $b \doteq 0{,}64$ cm, $\beta \doteq 3{,}23°$, $\gamma \doteq 141{,}77°$; d) $a \doteq 9{,}17$ mm, $b \doteq 8$ mm, $\beta \doteq 49{,}11°$, $\gamma \doteq 70{,}89°$; e) $a \doteq 12{,}82$ cm, $b \doteq 11{,}21$ cm, $\beta \doteq 38{,}21°$, $\gamma \doteq 96{,}79°$

alebo $a \doteq 16{,}96$ cm, $b \doteq 1{,}52$ cm, $\beta \doteq 3{,}62°$, $\gamma \doteq 131{,}38°$; f) $a \doteq 9{,}98$ cm, $b \doteq 4{,}73$ cm, $\beta \doteq 22{,}52°$, $\gamma \doteq 103{,}48°$ alebo $a \doteq 10{,}8$ cm, $b \doteq 2{,}33$ cm, $\beta \doteq 10{,}04°$, $\gamma \doteq 115{,}96°$.

7. a) $t_c \doteq 8{,}68$ cm; b) $t_c \doteq 5{,}67$ cm; c) $t_c \doteq 20{,}22$ cm; d) $t_c = 13$ cm; e) $t_c \doteq 16{,}61$ cm; f) $t_c \doteq 10{,}7$ cm.

8. a) $t_a \doteq 4{,}97$ cm; b) $t_a \doteq 8{,}39$ cm; c) $t_a = 6{,}5$ cm; d) $t_a \doteq 7{,}91$ cm; e) $t_a \doteq 3{,}25$ cm; f) $t_a \doteq 16{,}61$ cm.

9. $|AC| \doteq 23{,}86$ cm, $|BD| \doteq 8{,}04$ cm.

10. $|BC| \doteq 8{,}91$ cm, kratšia uhlopriečka $|AC| \doteq 9{,}27$ cm.

11. Dve riešenia: $|BC| \doteq 5{,}59$ cm a dlhšia uhlopriečka $|AC| \doteq 19{,}2$ cm alebo $|BC| \doteq 14{,}48$ cm a dlhšia uhlopriečka $|AC| \doteq 26{,}93$ cm.

12. $|AB| : |BC| \doteq 0{,}65$ alebo $|AB| : |BC| \doteq 1{,}53$.

13. $|AB| \doteq 40{,}24$ cm, $|BC| \doteq 13{,}2$ cm, $|CA| \doteq 35{,}82$ cm alebo $|AB| \doteq 26{,}77$ cm, $|BC| \doteq 25{,}01$ cm, $|CA| \doteq 19{,}51$ cm.

14. $|AB| \doteq 19{,}13$ cm, $|CA| \doteq 24{,}62$ cm.

15. a) 3 m, 4 m, 5 m; b) 3 m, 5 m, 7 m; c) 12 m, 23 m, 34 m; d) 6 m, 11 m, 16 m.

16. a) $|AC| = |BD| \doteq 7{,}81$ cm; b) $|AC| \doteq |BD| \doteq 6{,}63$ cm; c) $|AC| = |BD| = 7$ cm; d) taký lichobežník neexistuje.

17. 1 : 2.

18. Dve riešenia: $a = 2(1+\sqrt{3})$ cm, $b = 2(3+\sqrt{3})$ cm, $c = 4(1+\sqrt{3})$ cm alebo $a = \frac{2}{3}(1+\sqrt{13})$ cm, $b = \frac{2}{3}(7+\sqrt{13})$ cm, $c = \frac{4}{3}(1+\sqrt{13})$ cm.

9.9 Sínusová veta

1. a) $b = 6{,}5$ cm; b) $b \doteq 47{,}2$ cm; c) taký trojuholník neexistuje; d) $b \doteq 4{,}24$ cm; e) $b \doteq 0{,}9$ cm; f) $b \doteq 6{,}93$ cm.

2. a) $\beta \doteq 28{,}13°$; b) $\beta = 90°$; c) $\beta \doteq 46{,}43°$ alebo $\beta \doteq 133{,}57°$; d) taký trojuholník neexistuje; e) $\beta \doteq 35{,}62°$ alebo $\beta \doteq 144{,}38°$; f) $\beta \doteq 32{,}77°$.

3. a) 5 cm $< b <$ 10 cm; b) $b = 5$ cm alebo $b \geq 10$ cm; c) 0 cm $< b <$ 5 cm.

4. 2.

5. a) $0° < \alpha < 30°$; b) $\alpha = 30°$; c) $180° > \alpha > 30°$.

6. a) $b \doteq 1{,}65$ cm, $\beta \doteq 13{,}81°$, $\gamma \doteq 46{,}19°$; b) $b \doteq 15{,}7$ cm, $\beta \doteq 108{,}57°$, $\gamma \doteq 46{,}43°$ alebo $b \doteq 6{,}05$ cm, $\beta \doteq 21{,}43°$, $\gamma \doteq 133{,}57°$; c) $a \doteq 14{,}38$ cm, $\alpha \doteq 66{,}66°$, $\gamma \doteq 63{,}34°$ alebo $a \doteq 3{,}62$ cm, $\alpha \doteq 13{,}34°$, $\gamma \doteq 116{,}66°$; d) taký trojuholník neexistuje; e) $b \doteq 5{,}44$ cm, $\alpha \doteq 17{,}92°$, $\beta \doteq 12{,}08°$; f) $a \doteq$ $\doteq 22{,}54$ cm, $c \doteq 21{,}15$ cm, $\gamma = 65°$.

7. 13,16 cm a 17,72 cm.

8. 18,37 cm a 20,49 cm, alebo 12,25 cm a 16,73 cm alebo 10,98 cm a 13,45 cm.

9. 23,59°, 126,42° a 24,14 cm, alebo 38,68°, 111,32° a 22,36 cm, alebo 141,32°, 8,68° a 3,62 cm alebo 97,52°, 52,48° a 7,57 cm.

10. 7,76 cm, 14,59 cm a 19,65 cm.

11. $|AC| = 20$ cm, $\gamma \doteq 28{,}96°$.

12. $|AB| \doteq 86{,}38$ cm, $|AC| \doteq 45{,}96$ cm, $\gamma = 140°$ alebo $|AB| \doteq 162{,}34$ cm, $|AC| \doteq 86{,}38$ cm, $\gamma = 140°$.

9.10 Euklidove vety

1. a) 45 cm^2; b) 1 dm^2; c) $7\sqrt{3}$ m^2.

2. a) 8 cm a 8 cm; b) 5 cm a 45 cm; c) taký pravouhlý trojuholník neexistuje; d) $4 - \sqrt{7}$ cm a $4 + \sqrt{7}$ cm.

3. a) $a = 45$ cm, $b = 60$ cm, $c = 75$ cm; b) $a = 6$ cm, $b = 6\sqrt{3}$ cm, $c = 15$ cm; c) taký pravouhlý trojuholník neexistuje; d) $a = 31{,}875$ cm, $b = 17$ cm, $c = 36{,}125$ cm; e) $a = \frac{20}{3}$ cm, $b = 5$ cm, $c = \frac{25}{3}$ cm; f) $a = 12$ cm, $b = 24\sqrt{2}$ cm, $c = 36$ cm; g) $a = 2$ cm, $b = 2\sqrt{3}$ cm, $c = 4$ cm; h) $a = 15$ cm, $b = 20$ cm, $c = 25$ cm alebo $a = 20$ cm, $b = 15$ cm, $c = 25$ cm.

4. Napríklad: zostrojíme úsečku AB, $|AB| = 6$, na nej bod P taký, že $|AP| = 1$, zostrojíme polkružnicu k nad priemerom AB, kolmicu p na úsečku AB cez bod P, prienik polkružnice k s priamkou p označíme C, platí $|PC| = \sqrt{5 \cdot 1}$.

5. a) jedno z možných riešení: zostrojíme úsečku AB, $|AB| = 8$, na nej bod P taký, že $|AP| = 3$, zostrojíme polkružnicu k nad priemerom AB, kolmicu p na úsečku AB cez bod P, prienik polkružnice k s priamkou p označíme C, platí $|PC| = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$; b) jedno z možných riešení: zostrojíme úsečku AB, $|AB| = 5$, na nej bod P taký, že $|AP| = 3$, zostrojíme polkružnicu k nad priemerom AB, kolmicu p na úsečku AB cez bod P, prienik polkružnice k s priamkou p označíme C, platí $|AC| = \sqrt{15}$.

6. a) jedno z možných riešení: zostrojíme úsečku AB, $|AB| = x+y$, na nej bod P taký, že $|AP| = x$, zostrojíme polkružnicu k nad priemerom AB, kolmicu p na úsečku AB cez bod P, prienik polkružnice k s priamkou p označíme C, platí $|PC| = \sqrt{xy}$; b) jedno z možných riešení: zostrojíme úsečku AB, $|AB| = x$, zostrojíme polkružnicu k nad priemerom AB a kružnicu l s polomerom y so stredom v bode A, prienik k a l označíme C, pätu kolmice z C na AB označíme P, platí $|AP| = \frac{y^2}{x}$; c) jedno z možných riešení: zostrojíme úsečku AB, $|AB| = x$, na nej bod P taký, že $|AP| = y$, zostrojíme polkružnicu k nad priemerom AB, kolmicu p na úsečku AB cez bod P, prienik polkružnice k s priamkou p označíme C, platí $|PC| = \sqrt{xy - y^2}$; d) jedno z možných riešení: zostrojíme úsečku AB, $|AB| = x$, na nej bod P taký, že $|AP| = y$, zostrojíme polkružnicu k nad priemerom AB, kolmicu p na úsečku AB cez bod P, prienik polkružnice k s priamkou p označíme C, platí $|BC| = \sqrt{x^2 - xy}$; e) jedno z možných riešení: najprv zostrojíme úsečku dĺžky $\frac{y^2}{x}$ rovnako ako v časti b), potom zostrojíme úsečku AB, $|AB| = y + \frac{y^2}{x}$, na nej bod P taký, že $|AP| = y$, zostrojíme polkružnicu k nad priemerom AB, kolmicu p na úsečku AB cez bod P, prienik polkružnice k s priamkou p označíme C, platí $|PC| = y\sqrt{\frac{y}{x}}$; f) jedno z možných riešení: zostrojíme úsečku AB, $|AB| = 2x$, na nej bod P taký, že $|AP| = x + y$, zostrojíme polkružnicu k nad priemerom AB, kolmicu p na úsečku AB cez bod P, prienik polkružnice k s priamkou p označíme C, platí $|PC| = \sqrt{x^2 - y^2}$; g) jedno z možných riešení: najprv zostrojíme úsečku dĺžky $\frac{y^2}{x}$ rovnako ako v časti b), potom zostrojíme úsečku AB, $|AB| = x + y + \frac{y^2}{x}$, na nej bod P taký, že $|AP| = x + y$, zostrojíme polkružnicu k nad priemerom AB, kolmicu p na úsečku AB cez bod P, prienik polkružnice k s priamkou p označíme C, platí $|PC| = \frac{y}{x}\sqrt{x^2 + xy}$; h) jedno z možných riešení: zostrojíme úsečku AB, $|AB| = x$, zostrojíme polkružnicu k nad priemerom AB a kružnicu l s polomerom y so stredom v bode A, prienik k a l označíme C, pätu kolmice z C na AB označíme P, pätu kolmice z P na AC označíme Q, platí $|AQ| = \frac{y^3}{x^2}$; i) úsečka takejto dĺžky existuje len vtedy, ak platí $x \geq 2y$, jedno z možných riešení: zostrojíme úsečku AB, $|AB| = x$, zostrojíme polkružnicu k nad priemerom AB a priamku q rovnobežnú s úsečkou AB vo vzdialenosti y od AB, priesečník polkružnice k a priamky q, ktorý je bližšie k bodu B, označíme C, pätu kolmice z C na AB označíme P, platí $|AP| = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4y^2})$.

7. Jedno z možných riešení: zostrojíme úsečku AB, $|AB| = x$, zostrojíme polkružnicu k nad priemerom AB a kružnicu l s polomerom $\sqrt{x}$ so stredom v bode A, prienik k a l označíme C, pätu kolmice z C na AB označíme P, platí $|AP| = 1$.

8. Jedno z možných riešení: zostrojíme polpriamku AP, pričom $|AP| = x$, zostrojíme kolmicu PC na AP, kde $|PC| = \sqrt{x}$, zostrojíme os p úsečky AC, prienik priamok p a AP označíme S, zostrojíme kružnicu k so stredom S

a polomerom $|SA|$, prienik kružnice k a polpriamky AP rôzny od A označíme B, platí $|PB| = 1$.

9. Jedno z možných riešení: zostrojíme úsečku AB, $|AB| = 8\sqrt{7}$, na nej bod P taký, že $|AP| = \sqrt{7}$, zostrojíme polkružnicu k nad priemerom AB, kolmicu p na úsečku AB cez bod P, prienik polkružnice k s priamkou p označíme C, platí $|PC| = 7$, potom zostrojíme úsečku DE, $|DE| = 7$, zostrojíme polkružnicu m nad priemerom DE a kružnicu n s polomerom $\sqrt{7}$ so stredom v bode D, prienik m a n označíme F, pätu kolmice z F na DE označíme Q, platí $|DQ| = 1$.

10. $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.

10 Deliteľnosť

10.1 Násobok prirodzeného čísla

1. a) 2; b) 4; c) 8; d) 10; e) 18; f) 24; g) 32; h) 54; i) 76; j) 82; k) 138; l) 250; m) 12 348; n) 50 514; o) 296 780.

2. a) 3; b) 30; c) 48; d) 57; e) 66; f) 105; g) 141; h) 174; i) 216; j) 369; k) 726; l) 1 611; m) 9 492; n) 4 028 100; o) 8 115 486.

3. a) 12; b) 16; c) 28; d) 36; e) 52; f) 72; g) 108; h) 204; i) 260; j) 480; k) 1 772; l) 3 148; m) 19 944; n) 213 924; o) 2 517 096.

4. a) 10; b) 35; c) 65; d) 80; e) 125; f) 155; g) 210; h) 335; i) 395; j) 870; k) 1 240; l) 2 220; m) 25 315; n) 496 190; o) 6 368 915.

5. a) 30; b) 48; c) 72; d) 96; e) 150; f) 198; g) 246; h) 354; i) 444; j) 540; k) 1 122; l) 4 452; m) 11 670; n) 325 968; o) 4 872 222.

6. a) 21; b) 35; c) 63; d) 91; e) 147; f) 182; g) 238; h) 336; i) 364; j) 539; k) 707; l) 868; m) 36 603; n) 166 306; o) 6 589 569.

7. a) 32; b) 40; c) 72; d) 88; e) 184; f) 368; g) 456; h) 544; i) 576; j) 640; k) 952; l) 1 872; m) 3 008; n) 4 000; o) 5 424.

8. a) 45; b) 63; c) 72; d) 108; e) 153; f) 216; g) 351; h) 459; i) 666; j) 774; k) 1 062; l) 2 313; m) 3 879; n) 8 757; o) 785 664.

9. a) 60; b) 80; c) 100; d) 120; e) 260; f) 370; g) 450; h) 900; i) 1 510; j) 2 570; k) 39 800; l) 42 000; m) 100 010; n) 735 000; o) 1 768 740.

10. a) 1 000; b) 2 700; c) 3 400; d) 4 900; e) 10 100; f) 30 000; g) 750 200; h) 1 007 000; i) 9 871 400; j) 12 405 800.

11. a) áno; b) nie; c) nie; d) áno; e) nie; f) nie; g) áno; h) áno; i) áno; j) nie; k) áno; l) áno.

12. a) áno; b) áno; c) nie; d) nie; e) áno; f) áno; g) nie; h) nie; i) nie; j) nie; k) áno; l) nie.

13. a) nie; b) nie; c) nie; d) áno; e) áno; f) nie; g) nie; h) áno; i) nie; j) nie; k) nie; l) áno.

14. a) nie; b) áno; c) nie; d) áno; e) nie; f) áno; g) nie; h) nie; i) áno; j) nie; k) nie; l) áno.

15. a) áno; b) nie; c) áno; d) áno; e) áno; f) nie; g) nie; h) áno; i) áno; j) nie; k) nie; l) áno.

16. a) áno; b) áno; c) áno; d) áno; e) nie; f) áno; g) nie; h) nie; i) nie; j) áno; k) nie; l) nie.

17. a) áno; b) áno; c) áno; d) áno; e) nie; f) áno; g) áno; h) áno; i) nie; j) nie; k) áno; l) nie; m) áno; n) áno; o) áno; p) nie; q) áno; r) áno; s) nie; t) áno; u) nie.

18. 105, 120, 135, 150, 165, 180, 195.

19. a) áno; b) nie; c) nie; d) áno; e) áno; f) nie; g) áno; h) nie; i) áno; j) áno; k) áno; l) áno; m) áno; n) nie; o) nie.

20. a) sedemnásobok čísla 12; b) sú rovnaké; c) sú rovnaké; d) šestnásťnásobok čísla 16; e) sú rovnaké; f) jedenásťnásobok čísla 12; g) sú rovnaké.

21. a) 16; b) 104; c) 1 000; d) 10 000.

22. a) áno; b) nie; c) áno; d) nie; e) áno; f) nie; g) áno; h) nie; i) áno; j) áno; k) nie; l) nie.

23. 12, 24, 36.

10.2 Deliteľ prirodzeného čísla

1. a) nie; b) áno; c) nie; d) áno; e) áno; f) áno; g) nie; h) áno; i) nie; j) áno; k) nie; l) nie; m) nie; n) áno; o) áno.

2. a) 4, zv. 0; b) 2, zv. 3; c) 2, zv. 4; d) 0, zv. 10; e) 3, zv. 6; f) 18, zv. 3; g) 13, zv. 5; h) 12, zv. 0; i) 2, zv. 7; j) 3, zv. 7; k) 4, zv. 10; l) 7, zv. 11; m) 12, zv. 14; n) 15, zv. 22; o) 103, zv. 13; p) 146, zv. 0.

3. a) 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60; b) 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60; c) 42, 48, 54, 60; d) 42, 48, 54, 60.

4. a) 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50; b) 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48; c) 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48; d) 24, 30, 36, 42, 48; e) 24, 32, 40, 48; f) 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48; g) 24, 48; h) 24, 36, 48; i) 24, 48.

5. a) pravdivé; b) pravdivé; c) pravdivé; d) pravdivé; e) pravdivé; f) nepravdivé, napr. 12.

6. a) 1, 2, 4, 8; b) 1, 2, 3, 4, 6, 12; c) 1, 2, 4, 8, 16; d) 1, 3, 7, 21; e) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; f) 1, 3, 9, 27; g) 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30; h) 1, 53; i) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72; j) 1, 3, 5, 15, 25, 75; k) 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100; l) 1, 5, 23, 115.

7. 24.

8. 4, 9, 25.

10.3 Kritériá deliteľnosti

1. a) nie je; b) je; c) nie je; d) je; e) je; f) nie je; g) je; h) nie je; i) je; j) nie je.

2. a) nie je; b) je; c) nie je; d) je; e) nie je; f) nie je; g) je; h) nie je; i) je; j) nie je.

3. a) 2, 8; b) 0, 6; c) 2, 8; d) 4; e) 4; f) 2, 8; g) 4; h) 0, 6; i) 4; j) 0, 6.

4. a) 5; b) 3, 9; c) 5; d) 1, 7; e) 3, 9; f) 5; g) 1, 7; h) 5; i) 1, 7; j) 3, 9.

5. a) 2, 6; b) 2, 6; c) 0, 4, 8; d) 1, 3, 5, 7, 9; e) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; f) 0, 4, 8; g) 2, 6; h) 1, 3, 5, 7, 9; i) 0, 2, 4, 6, 8; j) 0, 2, 4, 6, 8; k) nemá riešenie; l) 1, 3, 5, 7, 9; m) 0, 2, 4, 6, 8; n) nemá riešenie; o) 2, 6; p) 0, 4, 8.

6. a) 99, 18; b) 63, 90, 99; c) nedá sa, po zmene ľubovoľnej jednej cifry už číslo nebude deliteľné deviatimi; d) 18, 36; e) 423, 153, 126; f) 774, 144, 171; g) 567, 207, 297, 261; h) 9 063, 3 663, 3 033, 3 060, 3 069; i) nedá sa, po zmene ľubovoľnej jednej cifry už číslo nebude deliteľné deviatimi; j) 6 293 934, 6 203 034.

7. a) 10, 14, 18, 40, 48, 70, 74, 78, 80, 84 ; b) 108, 147, 174, 180, 408, 417, 471, 480, 708, 714, 741, 780, 801, 804, 807, 810, 840, 870; c) 140, 170, 180, 410, 470, 480, 710, 740, 780, 810, 840, 870; d) 104, 108, 140, 148, 180, 184, 408, 480, 704, 708, 748, 780, 784, 804, 840; e) 1 704, 1 740, 7 104, 7 140; f) 810; g) 87 140; h) 180; i) 10 784.

10.4 Prvočísla a zložené čísla

1. a) nie je ani prvočíslo ani zložené číslo; b) prvočíslo; c) zložené číslo; d) zložené číslo; e) prvočíslo; f) zložené číslo; g) zložené číslo; h) prvočíslo; i) zložené číslo; j) prvočíslo; k) zložené číslo; l) prvočíslo; m) zložené číslo; n) zložené číslo; o) prvočíslo; p) zložené číslo; q) zložené číslo; r) zložené číslo.

2. a) $2 \cdot 5$; b) $2 \cdot 2 \cdot 3$; c) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; d) $2 \cdot 3 \cdot 7$; e) $2 \cdot 2 \cdot 13$; f) $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; g) $5 \cdot 13$; h) $2 \cdot 3 \cdot 13$; i) $3 \cdot 5 \cdot 7$; j) $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$; k) $3 \cdot 3 \cdot 17$; l) $11 \cdot 29$; m) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$; n) $5 \cdot 7 \cdot 23$; o) $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$; p) $5 \cdot 5 \cdot 61$; q) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$; r) $3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

3. 1, 3, 7, 9.

4. Napr. 101, 103, 107, 109.

5. 233.

6. 127.

7. 30, 42, 60, 66, 70, 78, 84, 90.

8. 1 020.

9. 4.

10. 8.

11. $a = 19$, $b = 18 - c$, c je ľubovoľné prirodzené číslo.

12. $a = 87$, $b = c + 86$, c je ľubovoľné prirodzené číslo.

10.5 Najmenší spoločný násobok

1. a) 7; b) 8; c) 15; d) 30; e) 12; f) 72; g) 84; h) 280; i) 156; j) 84; k) 432; l) 180; m) 360; n) 375; o) 168; p) 420; q) 588; r) 1 260; s) 504; t) 528; u) 2 700; v) 532; w) 2 625; x) 8 906.

2. a) 6; b) 8; c) 72; d) 360; e) 84; f) 60; g) 105; h) 156; i) 630; j) 300; k) 1 008; l) 10 584.

3. a) 5; b) také číslo neexistuje; c) 9; d) 108; e) 5; f) 11; g) 1; h) 4; i) 48.

4. 6, 42.

5. 7, 14, 21, 42.

6. 8 a 12.

7. 11.

8. 59.

9. 72, 36, 18, 9.

10. 300, 100.

10.6 Najväčší spoločný deliteľ

1. a) 1; b) 2; c) 1; d) 4; e) 3; f) 6; g) 17; h) 16; i) 25; j) 12; k) 1; l) 18; m) 22; n) 6; o) 45; p) 4; q) 90; r) 216; s) 40; t) 175; u) 132; v) 1; w) 315; x) 182.

2. a) 8; b) 3; c) 1; d) 7; e) 6; f) 1; g) 1; h) 6; i) 4; j) 6; k) 47; l) 5; m) 3; n) 14; o) 36.

3. 18, 54, 90.

4. 100, 150, 175, 200, 225, 275.

5. 16, 32, 48, 64, 96, 112, 128, 144, 176, 192.

6. Také číslo neexistuje.

7. $(6, 10, 15)$, $(10, 12, 15)$ alebo $(10, 15, 18)$.

8. $(38, 352)$, $(52, 65)$, $(63, 385)$, $(81, 123)$, $(115, 125)$.

9. 12 a 72, 24 a 36.

10. 18 a 108, 36 a 54.

11. 2 a 24, 6 a 8.

10.7 Slovné úlohy

1. 1, 2, 4, 5, 10 alebo 20.

2. 1 dm, 2 dm alebo 4 dm.

3. Vzdialenosť stĺpikov bude 2,5 m a bude potrebných 60 stĺpikov.

4. Štvorcová dlaždica bude mať stranu dlhú 45 cm a budeme ich potrebovať 42.

5. Štvorcová tapeta môže mať stranu dlhú 24 cm a bude ich treba 313 kusov.

6. Štvorcová dlaždica na podlahu môže mať maximálnu veľkosť strany 40 cm. Štvorcová tapeta na steny má maximálnu veľkosť strany 20 cm a bude jej potrebných 234 kusov.

7. a) 65 cm; b) 30 cm; c) 5 cm.

8. a) áno; b) nie; c) áno; d) áno; e) nie; f) áno.

9. Obaja tam chodia každý 15. deň a najbližšie tam budú obaja tento týždeň v nedeľu.

10. a) o 12:20; b) 9 minút; c) 3 minúty; d) o 29 minút; e) 23-krát; f) prvý spoj odchádza o 5:05 a posledný o 22:59.

11. 3 minúty, 5 minút, 6 minút, 9 minút, 10 minút, 12 minút, 15 minút, 18 minút, 20 minút.

12. 30.

13. Bežali 28 minút. Jaromír obehol 12 okruhov, Jaroslav 7 okruhov. Jaromír obehol Jaroslava štyrikrát.

14. Bolo použitých 391 núl.

15. a) 2 strany; b) 14 strán; c) 64 strán.

16. a) Každých 24 dní; b) na 10. januára; c) 18-krát.

17. 10 bonboniér.

18. Zmestí sa doň 2 880 tehál.

19. Hrana tehly dĺžky 250 mm má byť rovnobežne s hranou kontajnera dĺžky 2 m, hrana tehly dĺžky 120 mm má byť rovnobežne s hranou kontajnera dĺžky 120 cm a hrana tehly dĺžky 65 mm má byť rovnobežne s hranou kontajnera dĺžky 150 cm. Takto sa zmestí do kontajnera 1 840 tehál.

Riešenia úloh

Obsah